Reimers

LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM

HERAUSGEGEBEN
VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM DES
MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

SIGNALANALYSE

1. LEHRBRIEF

02 1471 01 1

SIGNALANALYSE

1. LEHRBRIEF

Verfaßt von
Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang K r a a k
Technische Universität Dresden
Sektion Informationstechnik

02 1471 01 1

Lektor: Dr.-Ing. Prescher

Redaktionsschluß: März 1987

2. Ausgabe 1. Auflage

Best.-Nr. 02 1471 01 1 · Aufl. 900 · Veröffentlicht unter Ag 628/388/87 DDR

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen Dresden. Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen.

Gesamtherstellung: Polygrafischer Bereich des Wissenschaftlichen Informationszentrums der Bergakademie Freiberg

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1.	Signalanalyse zur Erkennung, Beschreibung oder Diagnose von Objekten	5
1.1.	Das Objekterkennungsproblem	5
1.2.	Methoden der Signalanalyse	7
1.3.	Signalbeschreibung	8
2.	Kennzeichnung von Signalen durch Merkmale der transformierten Funktion	9
2.1.	Grundproblem der Analysetransformation	11
2.2.	Orthogonaltransformation	11
2.2.1.	Orthogonalität	11
2.2.2.	Entwicklung nach orthogonalen Funktionen	12
2.2.3.	Energiebeziehungen	13
2.3.	Nichtorthogonale Funktionssysteme	14
2.4.	Approximationsfehler	15
3.	Beschreibung von Signalen im Frequenzbereich	16
3.1.	Fourierreihe	17
3.1.1.	Komplexe Aufbaufunktionen	17
3.1.2.	Reelle Aufbaufunktionen	18
3.1.3.	Betrags- und Phasenspektrum	19
3.1.4.	Die Parsevalsche Gleichung für die Fourierreihe	20
3.1.5.	Beispiel: Linienspektrum der Rechteckfunktion	20
3.1.6.	Aufgaben	25
3.2.	Fouriertransformation	25
3.2.1.	Transformationsgleichungen	25
3.2.2.	Die Parsevalsche Gleichung für aperiodische Vorgänge	28
3.2.3.	Zeitverschiebung	28
3.2.4.	Methoden zur Berechnung der Fouriertransformierten	29
3.2.5.	Beispiele	30
3.2.6.	Aufgaben	33
3.3.	Leistungsspektrum	33
3.3.1.	Definitionen und Zusammenhänge	33
3.3.2.	Aufgaben	37
3.4.	Zusammenhang von Amplitudendichte eines Einzelvorganges und Linienspektrum des periodisch wiederholten Vorganges	37
3.5.	Kurzzeitanalyse - Zeitfensterung	40
3.6.	Analysierschärfe	45

Seite

3.7. Zeitfunktionsanalyse mit Bandfiltern 48
3.7.1. Begriffe und Zusammenhänge 48
3.7.2. Beispiele 50
3.7.3. Aufgaben 53
3.8. Zusammenhang von Fourier- und Laplacetransformation 53

4. Analyse von Signalen mit Rechteckfunktionen 54
4.1. Mäanderfunktionen 54
4.1.1. Darstellung periodischer Zeitfunktionen 57
4.1.2. Aperiodische Funktionen 59
4.1.3. Parsevalsche Gleichung 62
4.1.4. Aufgaben 62
4.2. Haar-Transformation 62

1. Signalanalyse zur Erkennung, Beschreibung oder Diagnose von Objekten

Signale als zeitlich veränderliche physikalische Größen werden analysiert, um Informationen zu erhalten, die mit diesen Signalen übertragen werden, oder um Eigenschaften oder Zustände von Objekten zu erkennen.
Beispiele für die Anwendung von Methoden der Signalanalyse sind:

- Optimierung informationsübertragender Systeme hinsichtlich Güte und Kosten: Fernsprechanlagen, Rundfunkanlagen, Mikrofone, Lautsprecher, Theater, Konzertsäle usf.
- Automatische Spracherkennung: Aus der Schalldruckzeitfunktion gesprochenen Textes p(t) werden Worte oder Sätze erkannt, und es werden Reaktionen ausgelöst.
- Maschinendiagnostik: Auf der Basis von Schall- oder Maschinenschwingungen wird das Intaktsein von Maschinen oder Anlagen kontrolliert.
- Systemidentifikation: Gemessene Schalldruck- oder Schwingungszeitverläufe werden zur Identifikation oder Beschreibung von Objekten verwendet.
- Ortung mit elektromagnetischen Signalen (Radar: Flugkörperortung) oder mit Schallsignalen (Sonar: Unterwasserschallortung).
- Medizinische Diagnose auf der Grundlage des Elektrokardiogramms.
- Systemregelung oder -steuerung.

1.1. Das Objekterkennungsproblem

Signalanalyse im Sinne dieser Lehrbriefreihe wird vorwiegend zur Erkennung oder Beschreibung von Objekten durchgeführt.

Das Objekterkennungsproblem ist immer ein Problem zur Kennzeichnung eines Objektes für einen bestimmten Zweck. Es gibt im Sinne der technischen Anwendung kein absolutes Erkennungsproblem.

Im Sinne der Verallgemeinerung der Methoden zur Objekterkennung können wir das Vorgehen bei der automatischen Erkennung schematisch nach Bild 1.1 darstellen.

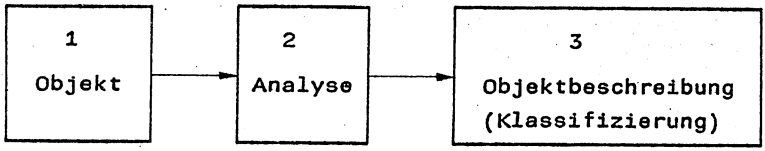


Bild 1.1 Schematische Darstellung der Objekterkennung

Das Objekt kann ein toter oder ein lebender Gegenstand sein, ein Vorgang oder auch ein Signal. Das Objekt liefert, soweit es nicht selber ein Signal ist, ein Signal. Dieses Signal kann auch die Reaktion des Objektes auf ein Testsignal sein.
Das Objekt wird im Sinne der Erkennungsaufgabe durch ein Objektmodell beschrieben. Das Objektmodell vereinfacht das in unendlicher Mannigfaltigkeit auftretende Objekt in einem dem Erkennungszweck angemessenen Umfang. Das Objektmodell besteht meist aus Kategorien, Klassen oder Kenngrößen, die a priori als Elemente der Objektbeschreibung festgelegt sind oder die heuristisch festgelegt werden.

Die Analyse verarbeitet das vom Objekt stammende Signal in der Art, daß eine Darstellung des Objektes durch Merkmale erfolgt, man sagt auch, die Analyse stellt das Objekt im Merkmalraum dar. Die Merkmale müssen so beschaffen sein, daß eine Zuordnung der zu analysierenden Objekte zu den Objektkategorien (Beschreibungskategorien) möglich ist.

Die Objektbeschreibung bildet das Objektmodell. Es nimmt eine Zuordnung des zu erkennenden Objektes durch Verarbeitung der Merkmale zu den Kategorien des Objektmodells vor. Dabei ist die Objektbeschreibung sehr häufig eine Klassifizierung, d. h., das uns in unendlicher Mannigfaltigkeit erscheinende Objekt wird mehr oder minder zahlreichen diskreten Werten zugeordnet.

Ein Beispiel für die Beschreibung eines Objektes durch Klassen eines Objektmodells ist ein automatischer Worterkenner:
Objekt ist die in eine elektrische Spannung umgesetzte Schalldruckzeitfunktion;
Klassen des Objektmodells sind die dem Erkenner zur Erkennung vorgegebenen oder ihm angelernten Worte;
in der Analyse werden aus der Schalldruckzeitfunktion Frequenz- oder Zeitmerkmale extrahiert.

In einer Anlernphase werden im Klassifikator des Erkenners durch Sprechproben die den Wortklassen eigentümlichen Frequenz- oder Zeitmerkmale zugeordnet.
Objektbeschreibung erfolgt durch die erkannten Worte oder die Wortfolge nach Analyse der Schalldruckzeitfunktion und Klassifizierung.
Die Erkennungsaufgabe könnte auch ganz anderer Art sein. Aus dem Verlauf der Schalldruckzeitfunktion könnte zum Beispiel eine Sprecheridentifikation erfolgen.

Zur Erkennung oder Identifikation von Systemen werden mitunter auch mehrere Signale verwendet. Um zum Beispiel die Übertragungseigenschaften eines elektrischen oder mechanischen Systems im Betriebszustand zu bestimmen, können Eingangs- und Ausgangssignale gemessen und miteinander korreliert oder in anderer Weise zueinander in Beziehung gesetzt werden. Zur Quellenidentifizierung werden mitunter an verschiedenen Orten erfaßte Signale zueinander in Beziehung gesetzt.

1.2. Methoden der Signalanalyse

Die Art der Signalanalyse hängt ab von der Erkennungsaufgabe und von den Fähigkeiten und Möglichkeiten des erkennenden Subjektes oder Signalverarbeitungssystems. Dabei werden in der Analyse diejenigen Merkmale aus einem oder mehreren Signalen abstrahiert, die für die beabsichtigte Erkennung geeignet sind.

Die biologische Signalanalyse und Signalverarbeitung ist außerordentlich komplex. Ein kaum zu übertreffendes Beispiel für die Vielschichtigkeit natürlicher Signalverarbeitung und -erkennung ist das menschliche Ohr beim Hören und Verstehen von Sprache. Hier sind Wandlung der Schalldruckzeitfunktion in eine Vielzahl biochemischer und elektrischer Teilsignale, Analyse, Verarbeitung und Erkennung untrennbar miteinander verknüpft.
Im Unterschied zur biologischen Signalverarbeitung werden in den technischen und mathematischen Verfahren der Signalverarbeitung die Signalanalyse zur Merkmalgewinnung und die Entscheidung oder Erkennung auf der Basis der gefundenen Merkmale meist in getrennten Schritten und jeweils nach bewährten Methoden und Verfahren durchgeführt.

Die technischen Verfahren der Signalanalyse waren in der Vergangenheit zwar häufig prinzipiell auf mathematische Methoden orientiert, in der Ausführung waren sie jedoch durch die technischen Realisierungsmöglichkeiten bestimmt. Durch die Fortschritte der Mikroelektronik und der digitalen Rechentechnik finden mehr und mehr numerische mathematische Verfahren unmittelbar Anwendung, und die Möglichkeiten der Analyse werden ständig erweitert.

Es geht bei der Analyse um eine problemorientierte Beschreibung der Zeitfunktion durch Merkmale, die eine wiederum problemorientierte Beschreibung des Objektes erlauben. Dabei werden mitunter diese Merkmale selbst zur Kennzeichnung des Objektes verwendet, mitunter werden sie auch weiterverarbeitet, z. B. in einem Klassifikator, und erst aus dieser Verarbeitung ergibt sich die Kennzeichnung des Objektes, z. B. durch eine Zuordnung zu den Objektklassen des Objektmodells. Bei der Analyse wird meist eine erhebliche Informationsreduktion vorgenommen. Ein rationelles Analyseverfahren wird nur die für die Objektbeschreibung notwendigen Merkmale erfassen. So wird man bei der Frequenzanalyse von Schalldruckzeitfunktionen die Bandbreite der Frequenzbänder so breit wie möglich und so schmal wie nötig wählen. Wie breit, das hängt von der Erkennungsaufgabe ab.

1.3. Signalbeschreibung

Die Beschreibung eines Signals im Ergebnis einer Analyse ist problemorientiert. Die Art der Beschreibung durch Kenngrößen oder Merkmale erfolgt in der Regel auf der Grundlage von Kenntnissen über

Struktur, Aufbau und Verhalten des zu erkennenden bzw. zu beschreibenden Systems,

Eigenart zur Verfügung stehender Meß- und Beurteilungsverfahren,

gegebene technische, personelle und ökonomische Bedingungen.

Es ergeben sich folgende Möglichkeiten zur Beschreibung eines Signals:

- Kennzeichnung durch Kenngrößen der transformierten Funktion,
- Kennzeichnung durch Kenngrößen aus der Originalfunktion,
- Kennzeichnung durch statistische Kenngrößen,
- Syntaktische Beschreibung.

Die ersten drei Möglichkeiten werden nachfolgend behandelt. Bei der syntaktischen Beschreibung geht es darum, daß für eine örtliche oder zeitliche Folge von Elementen des Signals Regeln, Gesetzmäßigkeiten, eine Art Grammatik angegeben wird. Diese Art der Beschreibung kann in manchen Fällen sehr vorteilhaft sein. Für die Anwendungsfälle, an die hier gedacht wird, hat sie bisher wenig Bedeutung erlangt. Auf sie wird hier nicht weiter eingegangen.

Die Zeitfunktionen, mit denen wir es im Zusammenhang mit der Signalanalyse zu tun haben, können wir folgenden Gruppen zuordnen:

1. Periodische Zeitfunktionen,
   z. B. ein sinusförmiges Signal oder der von einer Sirene abgestrahlte Schall, Druckverlauf im Zylinder einer Kraftmaschine, EKG des gesunden Menschen.

2. Zufallsfunktionen
   a) stationäre,
      z. B. weißes Rauschen, der Lärm des Düsenstrahles,
   b) nichtstationäre,
      Sprache, Verkehrslärm.

3. Einmalige Vorgänge (impulsartige),
   z. B. Druckverlauf, erzeugt vom Schuß,
   Stoßreaktion eines passiven Systems.

4. Überlagerungen,
   z. B. Propellerlärm, Preßlufthammergeräusch, mit einem Sprachsignal amplitudenmodulierte Trägerschwingung.

2. Kennzeichnung von Signalen durch Merkmale der transformierten Funktion

Bei zahlreichen Erkennungs- und Analyseaufgaben wird eine Zerlegung des Signals in Spektralkomponenten vorgenommen. Das hat seinen mathematischen Hintergrund in der Möglichkeit, eine Gruppe von Funktionen in einen Funktionsbereich mit harmonischen Aufbaufunktionen transformieren zu können. Die Gründe für die praktische Anwendung einer solchen Zerlegung können sehr vielfältig sein. Sie können auf den besonderen Eigenschaften der harmoni-

schen Funktionen beruhen, die wir im Abschnitt 3. begründen wollen. Sie können aber auch systemimmanent sein. Zum Beispiel wird bei der automatischen Spracherkennung häufig eine Zerlegung des Sprachsignals in Frequenzkomponenten vorgenommen, wobei die Orientierung aus dem physio-psychologischen akustischen Wahrnehmungsvorgang beim Menschen genommen wird. Oder aus der Frequenzanalyse eines Maschinengeräusches kann mitunter etwas über den Zustand der Maschine ausgesagt werden, weil der physikalische Vorgang von vornherein Rückschlüsse zu ziehen erlaubt, wie sich Abweichungen vom normalen Zustand im Frequenzspektrum auswirken müssen. Zum Beispiel können sich Unwuchten von rotierenden Teilen in Frequenzkomponenten auswirken, die durch die Drehzahl bestimmt sind.

Die an zwei Beispielen angedeutete Zerlegung eines Signals in seine Frequenzkomponenten ist in der Meßtechnik üblich. Wir beschreiben hier einen Zeitvorgang durch die in den Frequenzbereich transformierte Funktion, das Spektrum. Das ist meist dem physikalischen Vorgang gut angepaßt, und bei der Verwendung von analogen elektrischen Schaltkreisen ist die Analyse auch leicht zu realisieren. Verwenden wir aber zum Beispiel digitale elektrische Schaltkreise oder auch Digitalrechner für die Analyse, dann zeigt sich, daß es leichter ist, den zu analysierenden Vorgang in Rechteckfunktionen zu zerlegen. Es ist vom gesamten Erkennungsproblem her zu überprüfen, ob nicht eine solche Zerlegung in Rechteckfunktionen gleichwertige Aussagen erlaubt, wie die bei der Ermittlung des Frequenzspektrums erfolgende Zerlegung in Sinusfunktionen. Aber dann müssen wir, wenn wir konsequent sein wollen, die Frage stellen, ob nicht noch weitere Transformationssysteme gleich gut oder besser für den Erkennungsvorgang geeignet sind als diese zwei. Zum Beispiel könnte man aus dem zeitlichen Ablauf des Schalldruckverlaufes bei manchen Sprachlauten schließen, daß es vorteilhaft sein müßte, ein System für die Analyse zu verwenden, das aus nach e-Funktionen abklingenden Sinusfunktionen besteht. In diesem Hauptabschnitt sollen einige allgemeine Aussagen über die Eignung von Funktionssystemen zur Transformation der Ausgangsfunktion gemacht werden.

2.1. Grundproblem der Analysetransformation

Das Grundproblem der Analysetransformation ist die Abbildung einer Funktion (im folgenden soll die unabhängige Variable stets die Zeit t sein) in einen gegebenen Funktionsraum. Man kann diese Abbildung als Reihenentwicklung der Funktion x(t) nach Aufbaufunktionen $\varphi_n(t)$ auffassen:

$$x(t) = a_1\,\varphi_1(t) + a_2\,\varphi_2(t) + a_3\,\varphi_3(t) + \ldots = \sum_n a_n\,\varphi_n(t)\ . \qquad (2.1)$$

Die transformierte Funktion wird durch die Koeffizienten a_n beschrieben. Die a_n können in der Objekterkennung als Merkmale Verwendung finden.

Ein Maß für die Güte der Approximation der Originalfunktion x(t) durch die Summe der mit a_n multiplizierten Aufbaufunktionen $\sum_n a_n\,\varphi_n(t)$ ist der quadratische Fehler:

$$QF = \int_R \left| x(t) - \sum_n a_n\,\varphi_n(t) \right|^2 dt\ . \qquad (2.2)$$

Das Integral ist über den Funktionsraum R zu erstrecken, d. h. den Funktionsbereich der Aufbaufunktionen.

Die Transformationsaufgabe wird meist in dem Sinne durchgeführt, die a_n so zu bestimmen, daß der quadratische Fehler zum Minimum wird:

$$a_n:\ QF \longrightarrow \min\ .$$

Es ist zu erwähnen, daß auch andere Bestimmungskriterien als der quadratische Fehler möglich und sinnvoll sind.

2.2. Orthogonaltransformation

2.2.1. Orthogonalität

Die Bedingung für die Aufbaufunktionen

$$\int_T \varphi_m(t) \cdot \varphi_n^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ K_n & \text{für } m = n \end{cases} \qquad (2.3)$$

$\varphi_n^*(t)$ konjugiert komplexe Funktion von $\varphi_n(t)$,

T Orthogonalitätsintervall,

wird als Orthogonalität bezeichnet. Orthogonal heißt senkrecht aufeinander stehend. Zwei in einem n-dimensionalen Raum senkrecht aufeinander stehende Funktionen haben keine Projektionen aufeinander.

Die Auswahl orthogonaler Funktionssysteme für eine Transformation ist vor allen Dingen deshalb zweckmäßig, weil bei orthogonalen Funktionssystemen der Rechenaufwand zur Bestimmung der Koeffizienten a_n geringer wird als bei nichtorthogonalen Systemen.

Wählt man die orthogonalen Funktionen so aus, daß $K_n = 1$, dann werden sie auch als orthonormal bezeichnet.
Aus Gl. (2.3) ist leicht zu erkennen, daß sich ein orthogonales Funktionssystem bei Division der Aufbaufunktionen durch $\sqrt{K_n}$ in ein orthonormales überführen läßt.

2.2.2. Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

Die Funktion x(t) soll nach orthogonalen Funktionen $\varphi_n(t)$ entwickelt werden. Dann sind die a_n in Gl. (2.1) so zu bestimmen, daß der quadratische Fehler zum Minimum wird:

$$QF = \int_T \left| x(t) - \sum_n a_n \varphi_n(t) \right|^2 dt \longrightarrow \min .$$

Hierzu wird Gl. (2.2) nach a_n differenziert und Null gesetzt:

$$\frac{\partial QF}{\partial a_n} = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \left\{ \int_T x^2(t)\, dt - 2 \sum_m a_m \int_T x(t)\, \varphi_m(t)\, dt + \int_T \left[\sum_m a_m \varphi_m(t) \right]^2 dt \right\} = 0 .$$

Bei der Differentiation verschwinden alle Glieder, die nicht ein a_m enthalten, für das gilt m = n. Weiter verschwinden alle Glieder, in denen Produkte von Aufbaufunktionen mit unterschiedlichen Indizes auftreten (wegen der Orthogonalitätsbedingung). Somit wird

$$2 \int_T x(t)\, \varphi_n(t)\, dt = 2\, a_n \int_T \varphi_n^2(t)\, dt . \qquad (2.4)$$

Das Integral auf der rechten Seite von Gl. (2.4) hat den Wert K_n wegen der Orthogonalitätsbedingung. Somit wird

$$\boxed{a_n = \frac{1}{K_n} \int_T x(t)\, \varphi_n(t)\, dt\ .} \qquad (2.5)$$

Gl. (2.5) ist die Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten a_n. Um den jeweiligen Koeffizienten a_n zu erhalten, ist die zu entwickelnde Funktion $x(t)$ mit der entsprechenden Aufbaufunktion $\varphi_n(t)$ zu multiplizieren, und das Produkt ist über den Orthogonalitätsbereich der Aufbaufunktionen zu integrieren.

2.2.3. Energiebeziehungen

Zur genauen Annäherung der Funktion $x(t)$ ist ein vollständiges Funktionssystem erforderlich. Es besteht aus unendlich vielen Aufbaufunktionen. Für ein vollständiges System verschwindet der quadratische Fehler:

$$\int_T \Big| x(t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(t) \Big|^2 dt = 0\ ,$$

$$\int_T x^2(t)\, dt - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_T x(t)\, \varphi_n(t)\, dt + \int_T \Big[\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \varphi_n(t) \Big]^2 dt = 0\ .$$

Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingung (Gl. (2.3)) und von Gl. (2.5) wird

$$\int_T x^2(t)\, dt - 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n\, a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n\, a_n^2 = 0\ .$$

Hieraus folgt:

$$\boxed{\int_T x^2(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} K_n\, a_n^2\ .} \qquad (2.6)$$

Gl. (2.6) wird als Parsevalsche Gleichung bezeichnet.
Sie ist von großer Bedeutung. Die auf der linken Seite der Gl. (2.6) auftretende Größe ist der Energie des Vorganges $x(t)$ proportional.

Die Parsevalsche Gleichung kann somit folgendermaßen gedeutet werden:

Die Energie des Gesamtvorganges ist gleich der Summe der Energien aller Teilvorgänge.

2.3. Nichtorthogonale Funktionssysteme

Bei praktischen Erkennungsaufgaben ist man meist bemüht, den zu erkennenden Vorgang durch eine möglichst geringe Anzahl von Merkmalen zu beschreiben. Offensichtlich wird man einen Vorgang dann durch wenige Merkmale (Koeffizienten von Aufbaufunktionen) mit genügender Genauigkeit beschreiben können - d. h., den Vorgang mit Hilfe weniger Aufbaufunktionen genügend gut approximieren können -, wenn die Aufbaufunktionen in ihrer geometrischen Gestalt dem Vorgang ähnlich sind. Treten zum Beispiel in einem Vorgang Elemente auf, die wie abklingende e-Funktionen aussehen, dann ist es naheliegend, für die Approximation ebenfalls abklingende e-Funktionen zu verwenden. Meist findet man solche geeigneten Funktionssysteme heuristisch. Mitunter werden Methoden zur Orthogonalisierung nichtorthogonaler Funktionssysteme angewendet. Falls es für nichtorthogonale Funktionssysteme keine geeigneten Orthogonalisierungsverfahren gibt, dann können die Entwicklungskoeffizienten aus dem vollständigen Gleichungssystem des mit allen Aufbaufunktionen multiplizierten und integrierten Vorganges bestimmt werden.

Multipliziert man in Gl. (2.1.) die linke und die rechte Seite der Gleichung nacheinander mit jeder der Aufbaufunktionen und integriert über das interessierende Zeitintervall T, dann erhält man folgendes Gleichungssystem (Abk.: $x(t) = x$, $\varphi_n(t) = \varphi_n$):

$$\int_T x\,\varphi_1\,dt = a_1 \int_T \varphi_1^2\,dt + a_2 \int_T \varphi_2\,\varphi_1\,dt + \ldots + a_q \int_T \varphi_q\,\varphi_1\,dt$$

$$\int_T x\,\varphi_2\,dt = a_1 \int_T \varphi_1\,\varphi_2\,dt + a_2 \int_T \varphi_2^2\,dt + \ldots + a_q \int_T \varphi_q\,\varphi_2\,dt$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\int_T x\,\varphi_q\,dt = a_1 \int_T \varphi_1\,\varphi_q\,dt + a_2 \int_T \varphi_2\,\varphi_q\,dt + \ldots + a_q \int_T \varphi_q^2\,dt\,.$$

Man erhält die Entwicklungskoeffizienten a_1 bis a_q durch Lösung des vollständigen Gleichungssystems.
Für die orthogonalen Systeme verschwinden alle Glieder

$$\int_T \varphi_n \, \varphi_m \, dt, \quad \text{für die } m \neq n.$$

Es entsteht also ein wesentlich größerer Rechenaufwand bei der Koeffizientenbestimmung für nichtorthogonale Funktionssysteme.

2.4. Approximationsfehler

Die praktische Analysetransformation erfolgt mit einer beschränkten Genauigkeit. Es kann nur eine endliche Anzahl von Entwicklungskoeffizienten bestimmt werden. Für den Abbruch einer Approximation können folgende Gründe maßgeblich sein:

- Vom Problem her können Entwicklungskoeffizienten ab einer bestimmten Grenze von vornherein ohne Interesse sein, z. B. bei Frequenzanalysen, wenn der Vorgang eine obere Grenzfrequenz besitzt, oder wenn die Analyse in Hinblick auf Hörvorgänge erfolgt, infolge der Frequenzgrenzen des menschlichen Hörens.
- Ab einer bestimmten Grenze können die Entwicklungskoeffizienten durch Störungen bestimmt werden, die dem Signalvorgang immer überlagert sind.
- Ab einer bestimmten Grenze bringen Entwicklungskoeffizienten keine Verbesserung des Klassifikationsergebnisses. Zum Beispiel werden Merkmale aus dem Elektrokardiogramm (EKG) gewonnen, um das EKG Krankheitsklassen zuzuordnen. Der Erkennungsaufwand wächst mit der Anzahl der Koeffizienten (Merkmale) an. Bei Anwachsen über einen Grenzwert hinaus, wird kein Gewinn an Erkennungsgenauigkeit mehr erzielt.
- Es ist mitunter zweckmäßig, sich einen Restfehler vorzugeben, der die Abweichung der Approximation von der Originalfunktion kennzeichnet. Als Restfehler kann der Betrag der Abweichung angegeben werden.

Häufig wird als Restfehler die relative quadratische Abweichung angegeben:

$$\varepsilon_k = \frac{QF}{\int_T x^2(t)\,dt} = \frac{\int_T \left[x(t) - \sum_{n=1}^{k} a_n\,\varphi_n(t)\right]^2 dt}{\int_T x^2(t)\,dt}, \qquad (2.7)$$

wenn k das letzte Glied der Approximation ist.
Für orthogonale Aufbaufunktionssysteme folgt aus Gl. (2.7)

$$\varepsilon_k = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{k} K_n\,a_n^2}{\int_T x^2(t)\,dt}. \qquad (2.8)$$

Es ist zu beachten:
In $\sum_{n=1}^{K} K_n\,a_n^2$ muß die Gleichkomponente mit enthalten sein.

3. Beschreibung von Signalen im Frequenzbereich

Von der großen Zahl prinzipieller Möglichkeiten, Zeitverläufe in einfach aufgebaute Funktionen zu zerlegen, ist die Zerlegung in harmonische Funktionen (Sinus- oder Kosinusfunktionen) die gebräuchlichste. Das liegt häufig in der Natur der Analyseaufgabe begründet; im Abschnitt 2. wurden hierzu einige Beispiele genannt.

Neben einer Reihe von Vorteilen bei der technischen Realisierung von Analysen nach harmonischen Funktionen zeichnen sich diese gegenüber allen anderen Funktionen aber auch dadurch aus, daß Vorgänge mit sinusförmigem Verlauf, die auf ein beliebig kompliziertes lineares System wirken, immer nur Vorgänge der gleichen mathematischen Struktur, d. h. Sinusfunktionen der gleichen Frequenz, hervorrufen. Wirkt ein Vorgang mit einem beliebigen Zeitverlauf auf ein lineares System ein, dessen Übertragungsfaktor bekannt ist, dann kann der Ausgangsvorgang, also die vom Eingangsvorgang verursachte Wirkung, durch einfache Überlagerung jedes mit dem Übertragungsfaktor bewerteten Frequenzanteiles des Eingangsvorganges bestimmt werden. Das ist vom Prinzip her so einfach und anschaulich wie bei keinem ande-

ren Funktionssystem, mit dem ein Zeitvorgang ebenfalls zerlegt werden kann.

3.1. Fourierreihe

Periodische Funktionen lassen sich in ein Spektrum von diskreten harmonischen Funktionen zerlegen.
Bild 3.1 zeigt eine periodische Funktion mit der Periodendauer T.

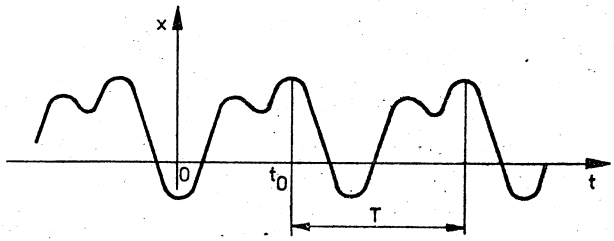


Bild 3.1 Periodische Funktion $x(t) = x(t \pm n\,T)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

3.1.1. Komplexe Aufbaufunktionen

Unter Verwendung von komplexen Aufbaufunktionen

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t} = \cos n\,\omega_0\,t + j \sin n\,\omega_0\,t$$

mit $\omega_0 = 2\,\pi\,f_0 = \frac{2\,\pi}{T}$

kann die Zeitfunktion als Fourierreihe dargestellt werden:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{X}_n\, e^{jn\omega_0 t} = FR^{-1}\,\underline{X}_n \qquad (3.1)$$

mit

$$\underline{X}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = FR\,x(t) \qquad (3.2)$$

(t_0 beliebiger Ausgangszeitpunkt im Zeitverlauf von x(t)).

Die Gesamtheit der Fourierkoeffizienten $\underline{X}_n$ bildet das Frequenzspektrum des Zeitvorganges x(t). Da die Fourierkoeffizienten nur bei den diskreten Frequenzen $f_n = n\ f_0$ auftreten, ist das Frequenzspektrum des Zeitvorganges ein Linienspektrum. Die Frequenzlinien folgen im Abstand der Grundfrequenz $f_0 = 1/T$ aufeinander. In Gl. (3.1) durchläuft n den Bereich von $-\infty$ bis $+\infty$. Es treten somit sowohl positive als auch negative Frequenzen auf. Aus Gl. (3.2) ist erkennbar, daß

$$\underline{X}_{-n} = \underline{X}_n^* \ .$$

Die Werte des Spektrums bei negativen Frequenzen ($n < 0$) sind also konjugiert komplex zu den Werten bei positiven Frequenzen ($n > 0$). Da der zeitabhängige Term in Gl. (3.1) mit wachsendem positivem t in der komplexen Ebene für $n \geq 0$ links herum, für $n < 0$ aber rechts herum dreht, ergeben sich für jede Teilfrequenz $n\ f_0$, und somit auch für eine reelle Zeitfunktion insgesamt, wieder reelle Werte, so wie es die gleichwertige Reihendarstellung erfordert.
(Zeigen Sie für ein ausgewähltes Beispiel die Reellwertigkeit der rechten Seite von Gl. (3.1) in der komplexen Ebene!)
Im Abschnitt 3.1.5. ist für ein Beispiel gezeigt, wie sich die Zeitfunktion aus den Aufbaufunktionen zusammensetzt. Die originale Zeitfunktion wird nur dann richtig nachgebildet, wenn alle Frequenzbestandteile betrags- und phasenrichtig aufsummiert werden.

Bemerkenswert ist, daß bei einer gegen unendlich gehenden Anzahl von Gliedern in der Fourierreihe die Nachbildung beiderseits von Sprungstellen einer Zeitfunktion, wie sie z. B. bei Rechteckfunktionen auftreten, um ca. 9 % überschwingt (Gibbsches Phänomen).

3.1.2. Reelle Aufbaufunktionen

Die Fourierreihe kann auch mit reellen Aufbaufunktionen gebildet werden:

$$x(t) = \underline{X}_- + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\ (n\ \omega_0\ t + \varphi_n) \qquad (3.3)$$

oder

$$x(t) = x_- + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\,\omega_0\,t + b_n \cos n\,\omega_0\,t) . \quad (3.4)$$

Es ist dann

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin n\,\omega_0\,t\,dt , \quad (3.5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\,\omega_0\,t\,dt . \quad (3.6)$$

Der Gleichanteil x_- ist der lineare Mittelwert der Zeitfunktion über eine Periode

$$x_- = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt . \quad (3.7)$$

Weiter ist

$$c_n = \left| \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right| \quad (3.8)$$

und

$$\tan \varphi_n = - \frac{a_n}{b_n} . \quad (3.9)$$

In der Darstellung (3.3) entsprechen die c_n den Amplituden der Teilschwingungen, wie sie auch bei einer technischen Analyse gemessen werden. Es ist

$$c_n = 2\,|\underline{X}_n| .$$

3.1.3. Betrags- und Phasenspektrum

Schreibt man für die Fourierkoeffizienten (3.2)

$$\underline{X}_n = |\underline{X}_n|\ e^{j\varphi_n} ,$$

so stellt

$|\underline{X}_n|$ das Betrags- oder Amplitudenspektrum und

φ_n das Phasenspektrum

des Zeitvorganges dar.

In grafischen Darstellungen werden $|\underline{X}_n|$ und φ_n über der Frequenz $f_n = n\, f_0$, über der Winkelfrequenz $\omega_n = n\, \omega_0$, über der normierten Frequenz $n = f_n/f_0 = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ oder auch wie in Bild 3.3 über einer anderweitig normierten Frequenz aufgetragen.

Der Wert von $|\underline{X}_n|$ für $n = 0$ entspricht dem Mittelwert der Zeitfunktion.

Für praktische Analysen wird meist nur das Betragsspektrum ermittelt. Aus dem Betragsspektrum allein ist jedoch keine Rekonstruktion bzw. keine eindeutige Beschreibung der Zeitfunktion möglich. Betrags- und Phasenspektrum können auch für die Darstellung (3.3) angegeben werden. Da hier nur positive Frequenzen auftreten, entspricht diese Darstellung sogar besser dem anschaulichen Vorstellungsvermögen.

3.1.4. Die Parsevalsche Gleichung für die Fourierreihe

Aus Gl. (2.6) folgt

$$\int_T x^2(t)\, dt = T\left[\left|\underline{X}_{n=0}\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left|\underline{X}_n\right|^2\right] = T\left[\underline{x}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{2}\right].$$

Hieraus ergibt sich für den Effektivwert

$$\tilde{x}^2 = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)\, dt = \left|\underline{X}_{n=0}\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left|\underline{X}_n\right|^2 = \underline{x}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{2}.$$

Das Quadrat des Effektivwertes einer periodischen Zeitfunktion ist also gleich der Summe der Quadrate der Effektivwerte aller Komponenten. Zum Beispiel in der Darstellung der Fourierreihe nach Gl. (3.3) ist die Amplitude der nten Teilschwingung c_n und der Effektivwert dieser Teilschwingung somit $c_n/\sqrt{2}$.

3.1.5. Beispiel: Linienspektrum der Rechteckfunktion

Es soll die periodische Rechteckfunktion nach Bild 3.2 analysiert werden.

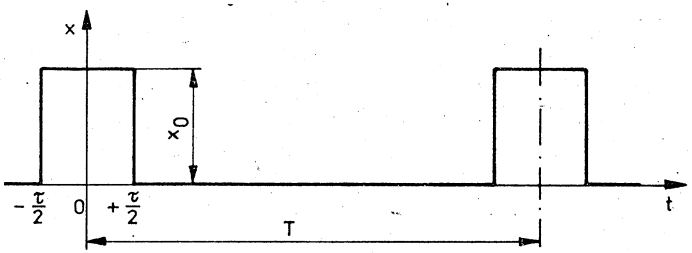


Bild 3.2 Periodische Rechteckfunktion

Aus Gl. (3.2) folgt

$$\underline{X}_n = \frac{x_0}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \cos n\,\omega_0\,t \qquad (3.10)$$

mit $\omega_0 = 2\,\pi\,f_0 = \frac{2\,\pi}{T}$.

Die Sinusglieder aus $e^{-jn\omega_0 t} = \cos n\,\omega_0\,t - j \sin n\,\omega_0\,t$ konnten in Gl. (3.2) vernachlässigt werden, da die Multiplikation der symmetrischen Zeitfunktion x(t) mit sin n ω_0 t und die Integration über die Periode T Null ergibt.

Aus Gl. (3.10) folgt

$$\underline{X}_n = x_0 \frac{\tau}{T}\,\mathrm{si}\,(n\,\pi\,\frac{\tau}{T}) \quad \text{für} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \qquad (3.11)$$

mit $\mathrm{si}\,x = \frac{\sin x}{x}$ (Spaltfunktion).

Das Gleichglied ergibt sich für n = 0 zu

$$x_- = \overline{x(t)} = \underline{X}_0 = x_0 \frac{\tau}{T} .$$

Die Zeitfunktion kann dann unter Berücksichtigung von cos (-x) = cos x durch die Reihe (s. Gl. (3.1))

$$x(t) = x_0 \frac{\tau}{T} + 2\,x_0 \frac{\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{si}\,(n\,\pi\,\frac{\tau}{T}) \cos \frac{2\,\pi}{T}\,t \qquad (3.12)$$

dargestellt werden.

Das Betragsspektrum ergibt sich aus Gl. (3.11) zu

$|X_n| = X_0 \frac{\tau}{T} \left|si\ (n\ \pi\ \frac{\tau}{T})\right|$ und das Phasenspektrum zu

$\varphi_n = \arg\ (si\ (n\ \pi\ \frac{\tau}{T})) = \arg\ sgn\ (si\ (n\ \pi\ \frac{\tau}{T}))$.

Für $\frac{\tau}{2} = \frac{1}{4}$ ist im Bild 3.3 das Amplitudenspektrum und im Bild 3.4 das Phasenspektrum dargestellt.

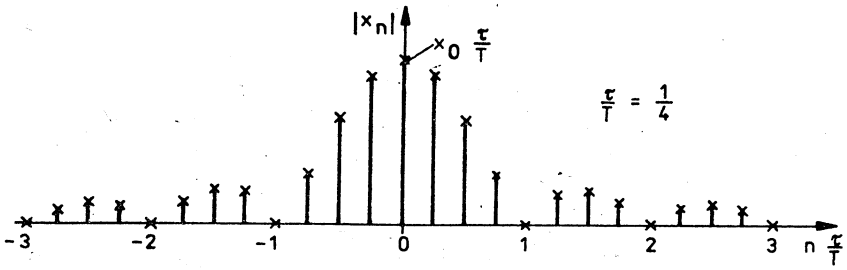


Bild 3.3 Amplitudenspektrum für eine Rechteckfunktion nach Bild 3.2 für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$

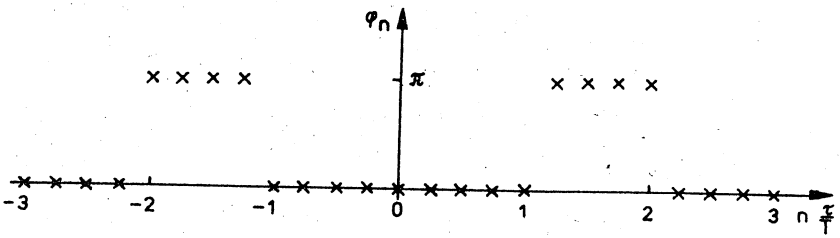


Bild 3.4 Phasenspektrum für eine Rechteckfunktion nach Bild 3.2 für $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$

Bild 3.5a zeigt den Aufbau der Rechteckfunktion ($\tau/T = 1/4$) aus harmonischen Funktionen. Bild 3.5b zeigt die Verzerrung des Zeitfunktionsverlaufes, der durch zwar amplitudengetreue, aber phasenunrichtige Addition der Teilkomponenten entsteht.
Im Bild 3.6 (siehe Seiten 26 und 27) sind für einige Modellzeitfunktionen die Frequenzspektren angegeben.

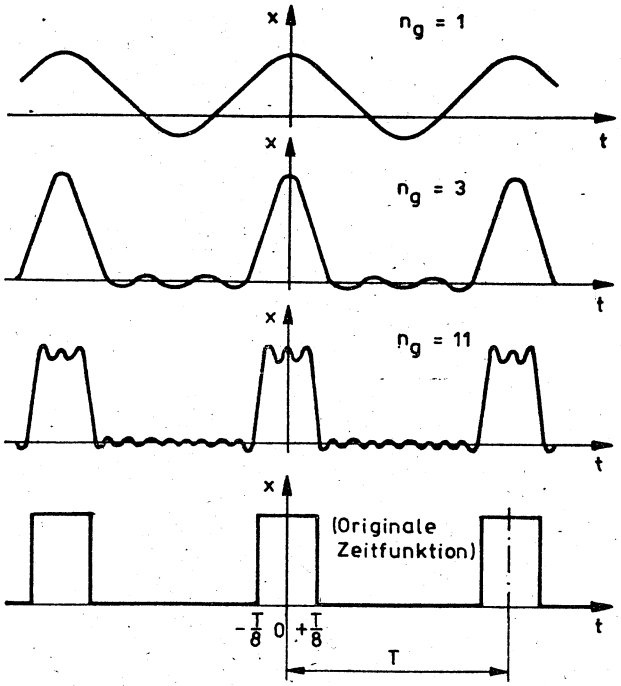


Bild 3.5a **Aufbau einer rechteckförmigen Zeitfunktion aus harmonischen Funktionen**

Fourierreihendarstellung:

$$x(t) = \frac{x_0}{4}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} si\left(n\frac{\pi}{4}\right)\cos n\frac{2\pi}{T}t\right]$$

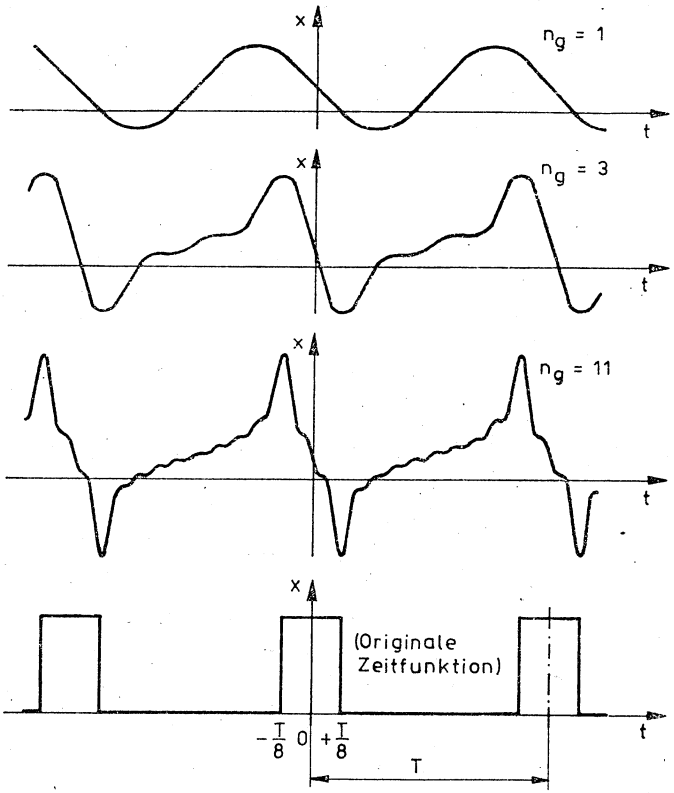


Bild 3.5b Verzerrter Funktionsverlauf durch phasenverschobene Addition der Teilkomponenten um einen Phasenwinkel von $\frac{\pi}{2}$ für die Aufbaufunktionen n = 0 ÷ 11

3.1.6. Aufgaben

Lösen Sie die Aufgaben 1 bis 4 aus Lehrbrief 3!

3.2. Fouriertransformation

Einen nichtperiodischen, zeitbegrenzten Vorgang, der die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\ dt < \infty \tag{3.13}$$

erfüllt, können wir wie einen Vorgang mit unendlich langer Periode auffassen, und wir können dann die Gleichungen für die Fourierreihe in die Gleichungen für die Fouriertransformation überführen.

3.2.1. Transformationsgleichungen

Führen wir Gl. (3.2) in Gl. (3.1) ein, dann wird mit $t_0 = -\frac{T}{2}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{ \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \right\} e^{jn\omega_0 t} \,. \tag{3.14}$$

Mit $T \longrightarrow \infty$ geht $\omega_0 \longrightarrow d\omega$ und $n\,\omega_0 \longrightarrow \omega$.

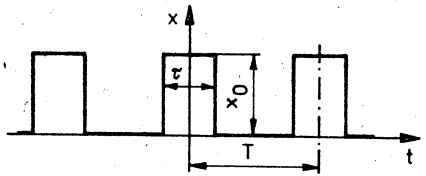
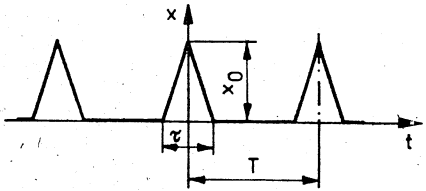
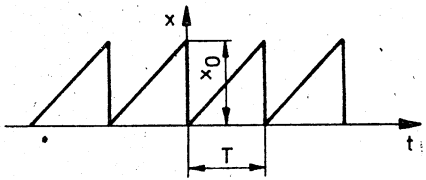
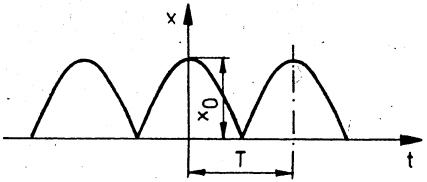
Die Summe in Gl. (3.14) geht dann in ein Integral über:

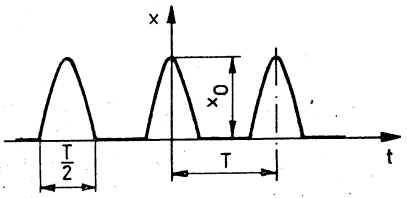
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right] e^{j\omega t}\, d\omega \,. \tag{3.15}$$

Bezeichnen wir nun das Integral in der eckigen Klammer von Gl. (3.15) mit $\underline{X}(\omega)$, dann können wir an Stelle der Gleichungen (3.1) und (3.2) auch schreiben

$$\underline{X}(\omega) = \mathrm{FT}\, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \,, \tag{3.16}$$

$$x(t) = \mathrm{FT}^{-1}\, \underline{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \,. \tag{3.17}$$

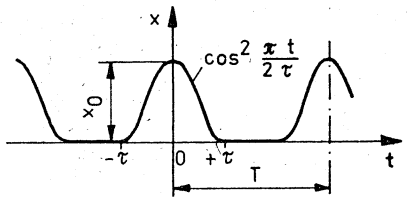
Zeitfunktion	Spektralkoeffizienten
	$\underline{X}_n = x_0 \frac{\tau}{T} \, si \, \frac{n \pi \tau}{T}$
	$\underline{X}_n = x_0 \frac{\tau}{2T} \, si^2 \, \frac{n \pi \tau}{2T}$
	$\underline{X}_n = j \frac{x_0}{2 \pi n}$. für $n \neq 0$ $\underline{X}_0 = \frac{x_0}{2}$
	$\underline{X}_n = \frac{2 x_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$



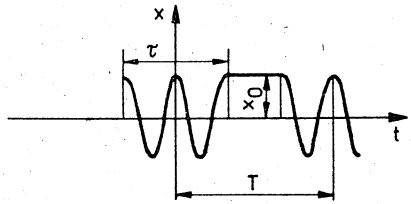
$$\underline{X}_0 = \frac{x_0}{\pi}$$

$$\underline{X}_1 = \frac{x_0}{4\pi}$$

$$\underline{X}_n = \frac{x_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \qquad \text{für n gerade}$$



$$\underline{X}_n = x_0 \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\mathrm{si}\,(n\pi\frac{\tau}{T})}{1 - (n\frac{\tau}{T})^2}$$



$$\underline{X}_n = x_0 \frac{\tau}{T} \left[\mathrm{si}\,(2\pi - \frac{n\pi\tau}{T}) + \mathrm{si}\,(2\pi + \frac{n\pi\tau}{T}) \right]$$

Bild 3.6 Linienspektren einiger periodischer Zeitfunktionen
($\mathrm{si}\ x = \frac{\sin x}{x}$)

An Stelle von Gleichung (3.11) bzw. (3.12) kann auch gleichberechtigt die Schreibweise

$$\underline{X}(f) = FT\, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\cdot 2\pi ft}\, dt\ ,$$

$$x(t) = FT^{-1}\, \underline{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(f)\, e^{j\cdot 2\pi ft}\, df$$

gewählt werden.

$\underline{X}(\omega)$ bzw. $\underline{X}(f)$ nennt man die Fouriertransformierte der Zeitfunktion $x(t)$ oder auch die spektrale Amplitudendichte; den vollständigen Verlauf der Amplitudendichte bezeichnet man als das Amplitudenspektrum der Zeitfunktion. Die Amplitudendichte besitzt einen kontinuierlichen Verlauf.

Beachten Sie den Unterschied zwischen $\underline{X}_n$ in Gl. (3.2) und $\underline{X}(\omega)$ in Gl. (3.16) sowohl im Hinblick auf diskreten bzw. kontinuierlichen Verlauf als auch im Hinblick auf die Dimension!)

3.2.2. Die Parsevalsche Gleichung für aperiodische Vorgänge

Die Parsevalsche Gleichung nimmt für aperiodische Vorgänge die Form an

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{X}(\omega)|^2\, d\omega\ . \qquad (3.18)$$

3.2.3. Zeitverschiebung

Nehmen wir an, wir haben eine betragsintegrierbare Zeitfunktion $x(t)$ und verschieben sie auf der Zeitachse in positiver Zeitachsenrichtung um einen Zeitabschnitt Δt. Es gilt somit für die zeitverschobene Funktion

$$x'(t) = x(t - \Delta t)\ .$$

In welchem Zusammenhang steht das Spektrum von $x'(t)$ mit dem Spektrum von $x(t)$?

Es ist das Spektrum von x'(t)

$$\underline{X}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \Delta t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

und das Spektrum von x(t)

$$\underline{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \,.$$

Setzen wir in $\underline{X}'(\omega)$ auf der rechten Seite $t' = t - \Delta t$ und schreiben wir am Ende an Stelle von t' wieder t, so wird

$$\underline{X}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega\Delta t}\, dt \,;$$

$$\underline{X}'(\omega) = \underline{X}(\omega)\, e^{-j\omega\Delta t} \,. \qquad (3.19)$$

Das Spektrum der zeitverschobenen Funktion ist also gleich dem Spektrum der Originalfunktion, multipliziert mit dem Faktor $e^{-j\omega\Delta t}$. Es ist weiter

$$|\underline{X}'(\omega)| = |\underline{X}(\omega)| \,.$$

Der Betrag des Spektrums ändert sich also durch die Zeitverschiebung nicht.

3.2.4. Methoden zur Berechnung der Fouriertransformierten

Liegen Algorithmen für Modell-Zeitvorgänge vor, so kann die Fourier-Hin- und -Rücktransformation unmittelbar durch Lösung der Integrale (3.16) oder (3.17) erfolgen. Es können dabei auch einige Gesetze und Rechenregeln angewendet werden, wie sie z. B. von Fritzsche (1985) angegeben wurden. Im Abschnitt 3.2.5. sind für einige Modellfunktionen Berechnungen der Amplitudendichte durchgeführt worden. Im Bild 3.9 sind Zeit- und Frequenzverlauf für diese und einige weitere Modellfunktionen grafisch dargestellt.

Wird die Fouriertransformation verwendet, um den Verlauf einer Zeitfunktion am Ausgang eines linearen Zweitores bei bekannter Eingangsfunktion zu berechnen (siehe hierzu Anhang 1, Lehrbrief 3), dann wird bei den hierbei auftretenden komplexen Integralen sehr vorteilhaft ein spezieller Satz der Funktionentheo-

rie angewendet (siehe Anhang 3, Lehrbrief 3). Lineare Zweitore werden durch Gewichtsfunktion oder Übertragungsfunktion gekennzeichnet. Nach Abschnitt 3.7. sind beide Kenngrößen über die Fouriertransformation miteinander verknüpft. Auch hier wird bei Umrechnungen vorteilhaft der Residuensatz aus Anhang 3 verwendet.

Bei der Analyse von Signalen, die von realen Vorgängen herrühren, liegen meist keine algorithmischen Darstellungen sondern nur meßtechnische Aufzeichnungen vor. Hier erfolgt die Fouriertransformation nach Diskretisierung der Signale mit Hilfe der "Diskreten Fouriertransformation" DFT (siehe Abschnitt 7.2., Lehrbrief 2).

3.2.5. Beispiele

1. Spektrum des Rechteckimpulses

Es ist das Amplitudenspektrum eines Rechteckimpulses mit einem Zeitverlauf nach Bild 3.7 zu berechnen.

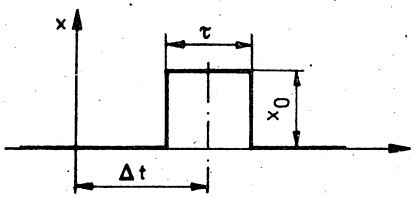


Bild 3.7 Rechteckimpuls

Für den um Δt nach links verschobenen, also zum Zeitachsenursprung symmetrischen Rechteckimpuls, ist

$$\underline{X}_0(\omega) = x_0 \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{j\omega t}\, dt ,$$

$$\underline{X}_0(\omega) = \frac{2\, x_0}{\omega} \sin \omega \frac{\tau}{2} .$$

Mit Gl. (3.16) und $\mathrm{si}\, x = \frac{\sin x}{x}$ folgt für das Spektrum des Impulses nach Bild 3.8

$$\underline{X}(\omega) = x_0\, \tau\, e^{-j\omega \Delta t}\, \mathrm{si}\, (\omega \tfrac{\tau}{2}) . \qquad (3.20)$$

Das Betragsspektrum des Rechteckimpulses ist dann

$$|\underline{X}(\omega)| = x_0 \tau \left| si\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)\right| . \qquad (3.21)$$

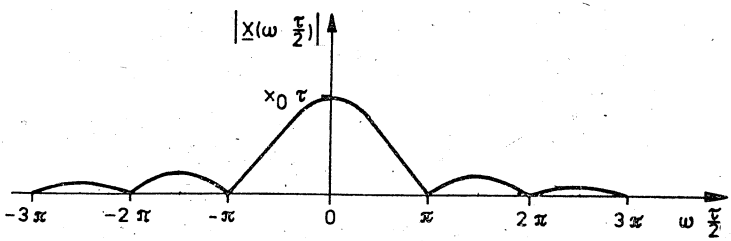


Bild 3.8 Betragsspektrum des Rechteckimpulses

Aus Gl. (3.20) und Bild 3.8 ist ersichtlich: je schmaler der Impuls (τ klein), desto breiter wird das Spektrum, denn die erste Nullstelle wird bei $\omega \frac{\tau}{2} = \pi$ also $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ erreicht. Ein sehr schmaler Rechteckimpuls hat in einem Frequenzbereich $\omega \frac{\tau}{2} \ll 1$ ein Spektrum

$$\underline{X}(\omega) = x_0 \tau \, e^{-j\omega\Delta t}$$

und ein Betragsspektrum

$$|X(\omega)| = x_0 \tau .$$

Das Betragsspektrum ist also für den schmalen Impuls unabhängig von der Frequenz.

2. Spektrum eines Stoßes

Zur einfachen mathematischen Behandlung wird angenommen, daß der Stoß wie ein Einheitsstoß, d. h. wie eine Diracsche δ-Funktion, verläuft:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{für} \quad t \neq 0 ,$$
$$\delta(t) = \infty \quad \text{für} \quad t = 0 ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1 .$$

Es wird dann die Amplitudendichte des Einheitsstoßes:

$$\underline{X}_{\perp E}(\omega) = 1 , \qquad (3.22)$$

denn $|e^{-j\omega t}| = 1$ für $t = 0$, und sonst ist immer, der Definition der δ-Funktion entsprechend, $x(t) = 0$. Wirkt zum Beispiel ein sehr kurzer Spannungsstoß $u(t)$ der Dauer τ auf ein elektrisches System mit einer oberen Grenzfrequenz $\omega_0 \ll \frac{1}{\tau}$ ein, dann kann für die Untersuchung dieses Systems (siehe Anhang 2, Lehrbrief 3) das Spektrum des Spannungsstoßes

$$\underline{X}_{\perp}(\omega) = K_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, dt$$

gesetzt werden. Das Spektrum ist also unabhängig von der Feinstruktur des Stoßes.

3. Spektrum einer sinusförmig verlaufenden Größe

Es sei $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$. Dann ist

$$\underline{X}(\omega) = x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega_0 t \cos \omega t\, dt =$$

$$= \frac{x_0}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos (\omega - \omega_0)\, t\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos (\omega + \omega_0)\, t\, dt\right].$$

Mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha t\, dt = 2\pi\, \delta(\alpha)$$

wird

$$\underline{X}(\omega) = x_0\, \pi\, \delta(|\omega| - \omega_0). \qquad (3.23)$$

Als periodische Funktion hat die Kosinusfunktion ein Linienspektrum. Die spektrale Amplitudendichte ist unendlich groß bei $|\omega| = \omega_0$, an jeder anderen Stelle verschwindet sie.

Beachten Sie: Eine sehr kurze Zeitfunktion hat ein sehr breites Amplitudenspektrum. Ein sehr schmales Amplitudenspektrum gehört zu einer sehr lang andauernden Zeitfunktion.

Im Bild 3.9 sind für die hier untersuchten und einige weitere ausgewählte Zeitfunktionen die Beziehungen für die Amplitudendichten angegeben und ihre Verläufe skizziert worden.

3.2.6. Aufgaben

Lösen Sie die Aufgabe 4 (Lehrbrief 3)!
Gehen Sie bei der Lösung dieser Aufgabe von den Ergebnissen der Aufgabe 3 aus, und berücksichtigen Sie den Abschnitt 3.2.3. und den Abschnitt 3.2.5., Pkt. 3!

3.3. Leistungsspektrum

3.3.1. Definitionen und Zusammenhänge

Häufig treten Zeitfunktionen auf, die nicht betragsintegrierbar sind, bei denen somit das Integral auf der rechten Seite von Gl. (3.16) nicht integrierbar ist, z. B. stationäre stochastische Vorgänge. Sie besitzen meist einen endlichen Leistungsinhalt:

$$\tilde{x}^2 = \overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)\,dt < \infty .$$

Hier ist es vorteilhaft, die spektrale Leistungsdichte einzuführen

$$w(f) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{\Delta f\to 0} \frac{\Delta\tilde{x}^2(f)}{\Delta f} . \qquad (3.24)$$

$\Delta\tilde{x}^2(f)$ ist der Effektivwert, der am Ausgang eines Rechteckfilters der Bandbreite Δf ermittelt werden kann, an dessen Eingang die Zeitfunktion x(t) liegt. Schreiben wir

$$w(f) = \frac{d\tilde{x}^2(f)}{df} , \qquad (3.25)$$

dann können wir $\tilde{x}^2(f)$ auch als den Frequenzverlauf des Effektivwertquadrates der Zeitfunktion x(t) auffassen, deren Spektrum durch einen idealen Tiefpaß auf den Frequenzbereich von 0 bis f begrenzt worden ist.
Aus Gl. (3.25) folgt für den Effektivwert der vollständigen Zeitfunktion

$$\tilde{x}^2 = \int_0^\infty w(f)\,df . \qquad (3.26)$$

In Übereinstimmung mit dem symmetrischen Amplitudenspektrum $\underline{X}(\omega)$ wird an Stelle von w(f) auch $S(\omega)$ als spektrale Leistungs-

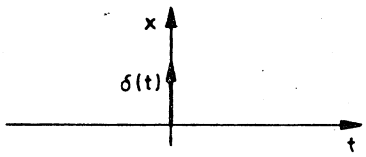
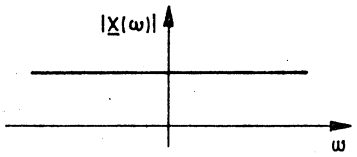
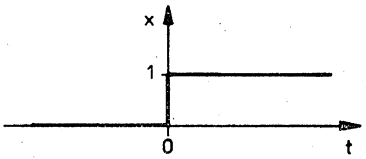
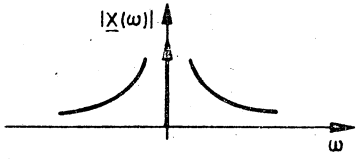
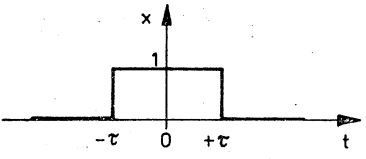
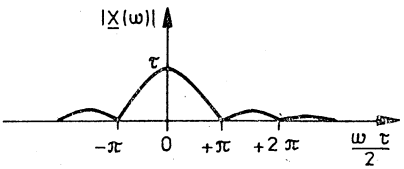
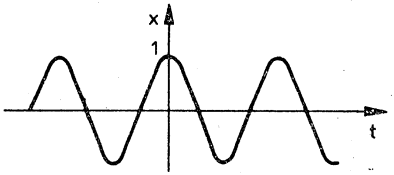
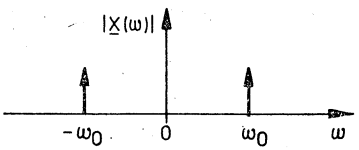
Zeitfunktion $x(t)$	Amplitudendichte $\underline{X}(\omega)$
 $x(t) = \delta(t)$	 $\underline{X}(\omega) = 1$
	 $\underline{X}(\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\,\omega}$
	 $\underline{X}(\omega) = \tau\ \mathrm{si}\ \frac{\omega\,\tau}{2}$
 $x(t) = \cos\ \omega_0\ t$	 $\underline{X}(\omega) = \pi\,\delta(\|\omega\| - \omega_0)$

Bild 3.9 Amplitudendichte von einigen ausgewählten Zeitfunktionen

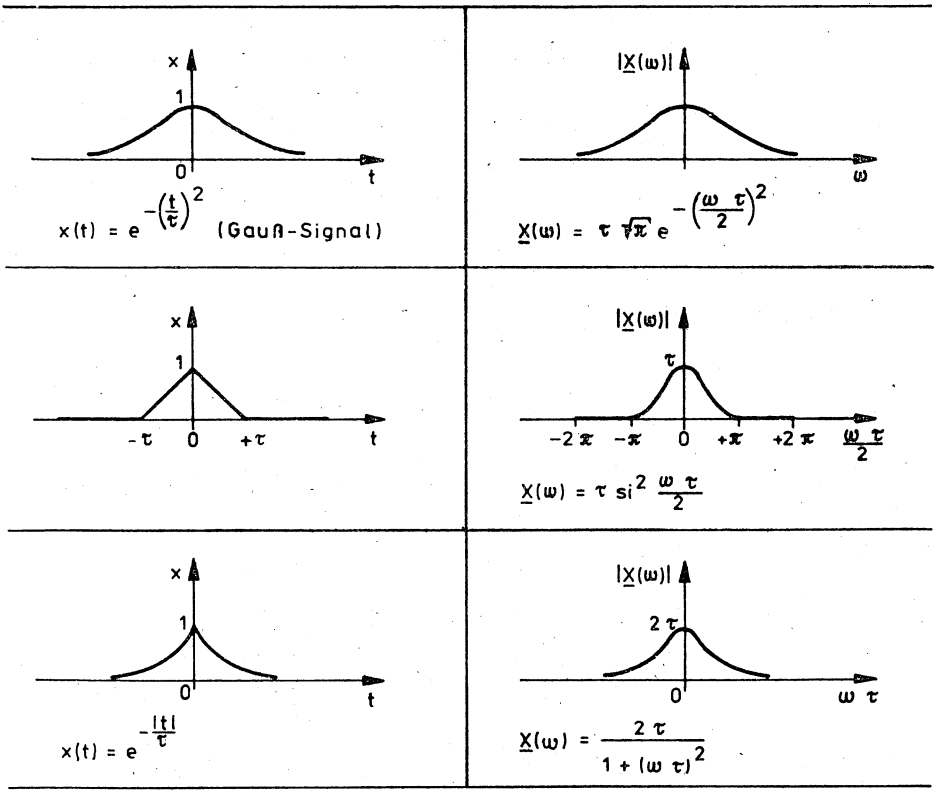


Bild 3.9 Amplitudendichte von einigen ausgewählten Zeitfunktionen (Fortsetzung)

dichte verwendet, und es gelten die Zusammenhänge

$$S(\omega) = S(-\omega) \qquad \text{(Symmetrie)}, \tag{3.27}$$

$$w(f) = 2\,S(\omega)\,, \tag{3.28}$$

$$\tilde{x}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\,df\,. \tag{3.29}$$

Die spektrale Leistungsdichte w(f) bzw. S(ω) ist immer eine reelle Funktion. In der technischen Anwendung wird meist w(f) angegeben, weil die Leistungsdichte in dieser Form durch Integration über den technischen Frequenzbereich - also über nur positive Frequenzen - das Effektivwertquadrat, d. h. eine der Leistung proportionale Größe, liefert.

S(ω) ist über die Fouriertransformation mit der Autokorrelationsfunktion des Zeitvorganges verbunden (siehe Abschnitt 9.2.3., Lehrbrief 2).

Eine sinusförmige Zeitfunktion

$$x(t) = \hat{x}\,\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

hat die Leistungsdichte

$$w(f) = \frac{\hat{x}^2}{2}\,\delta(f - f_0)\,,$$

und für ein Gleichglied

$$x(t) = x_-$$

ist

$$w(f) = 2\,x_-^2\,\delta(f)$$

(denn wegen der Symmetrie der δ-Funktion ist $\int_0^\infty \delta(f)\,df = \frac{1}{2}$, und die Leistungsdichte w(f) ist ja nur im positiven Frequenzbereich definiert).

$\tilde{x}^2(f)$ in Gl. (3.25) ist eine mit wachsender Frequenz nicht fallende Funktion. Ist die Ausgangszeitfunktion x(t) eine periodische Funktion oder besitzt sie periodische Anteile, dann enthält $\tilde{x}^2(f)$ Sprungstellen dort, wo die Zeitfunktion Linien im Frequenzspektrum besitzt. Die Leistungsdichte hat dann an diesen Stellen Pole: $w(f) \longrightarrow \infty$.

Bei der praktischen Schmalbandanalyse haben die zur Analyse verwendeten Filter eine endliche Bandbreite Δf. Der Filtermittenfrequenz f_m zugeordnet wird $\Delta\tilde{x}^2_M(f_m)$ gemessen. Man erhält als Meßwert

$$w_M(f_m) = \frac{\Delta\tilde{x}^2_M(f_m)}{\Delta f} \quad . \tag{3.30}$$

$w_M(f_m)$ nach Gl. (3.30) ist immer endlich. Die Leistungsdichte nach Gl. (3.30) ist der Mittelwert der Leistungsdichte über den Frequenzbereich Δf.

Zwischen Leistungsdichte und Amplitudendichte gilt der Zusammenhang

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left\{|\underline{X}_T(\omega)|^2\right\}$$

bzw.

$$w(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} E\left\{|\underline{X}_T(\omega)|^2\right\} .$$

Dabei ist $E\left\{|\underline{X}_T(\omega)|^2\right\}$ der Erwartungswert von $|\underline{X}_T(\omega)|^2$. $\underline{X}_T(\omega)$ ist die Amplitudendichte in einem Zeitabschnitt T der Zeitfunktion x(t). Der Erwartungswert ist der Mittelwert aus einer Vielzahl gleichartiger Vorgänge oder der Mittelwert aus einer Vielzahl von Teilabschnitten des gleichen Vorganges.

3.3.2. Aufgaben

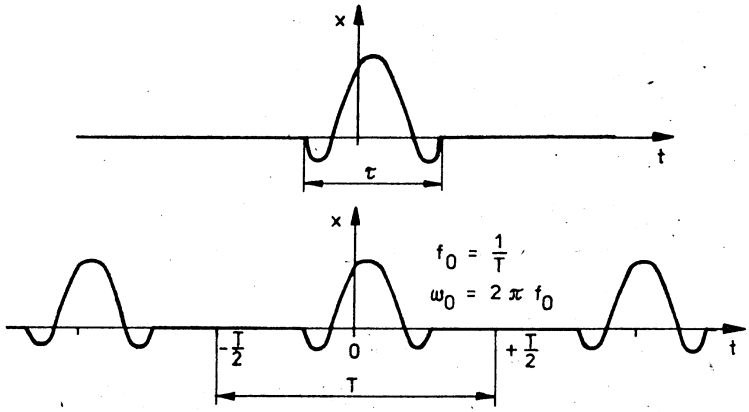
Lösen Sie die Aufgaben 5 und 6, Lehrbrief 3!

3.4. Zusammenhang von Amplitudendichte eines Einzelvorganges und Linienspektrum des periodisch wiederholten Vorganges

Ein Einzelvorgang x(t) wird, wie im Bild 3.10 gezeigt, mit der Periode $T \geq \tau$ kontinuierlich wiederholt, in der Praxis z. B. mit einem in festen Zeitabständen abgefragten Digitalspeicher.

Der periodisch wiederholte Vorgang besitzt nach G. (3.2) die Spektralwerte

$$\underline{X}_n(n\,\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \quad .$$



τ Dauer des Vorganges

Bild 3.10 Einzelvorgang - periodisch wiederholt

Da der Einzelvorgang nur innerhalb der Periodendauer T von Null verschiedene Werte aufweist, können wir für seine Amplitudendichte schreiben

$$\underline{X}(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\,.$$

Der Vergleich zeigt:

$$T\, X_n(n\,\omega_0) = \underline{X}(\omega = n\,\omega_0)\,. \qquad (3.31)$$

Der mit der Periodendauer T multiplizierte Wert der Spektrallinien des periodisch wiederholten Vorganges stimmt mit dem Wert der Amplitudendichte bei den korrespondierenden Frequenzen $\omega = n\,\omega_0 = n\,\frac{2\pi}{T}$ überein. Das mit der Periodendauer multiplizierte Linienspektrum des wiederholten Vorganges markiert somit die Hüllkurve der kontinuierlich verlaufenden Amplitudendichte des Einzelvorganges.

Um abzuschätzen, wie groß T gewählt werden muß, wollen wir von der Analyse eines Rechteckimpulses ausgehen. Für einen Rechteckimpuls nach Bild 3.7 erhält man für $\Delta t = 0$ die Amplitudendichte nach Gl. (3.20)

$$\underline{X}(\omega) = x_0\,\tau\,\mathrm{si}\,(\omega\,\tfrac{\tau}{2})\,.$$

Für den periodisch wiederholten Vorgang (Periode T) ergibt die Rechnung

$$\underline{X}_n = x_0 \frac{\tau}{T} \operatorname{si}\left(n\,\omega_0 \frac{\tau}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} .$$

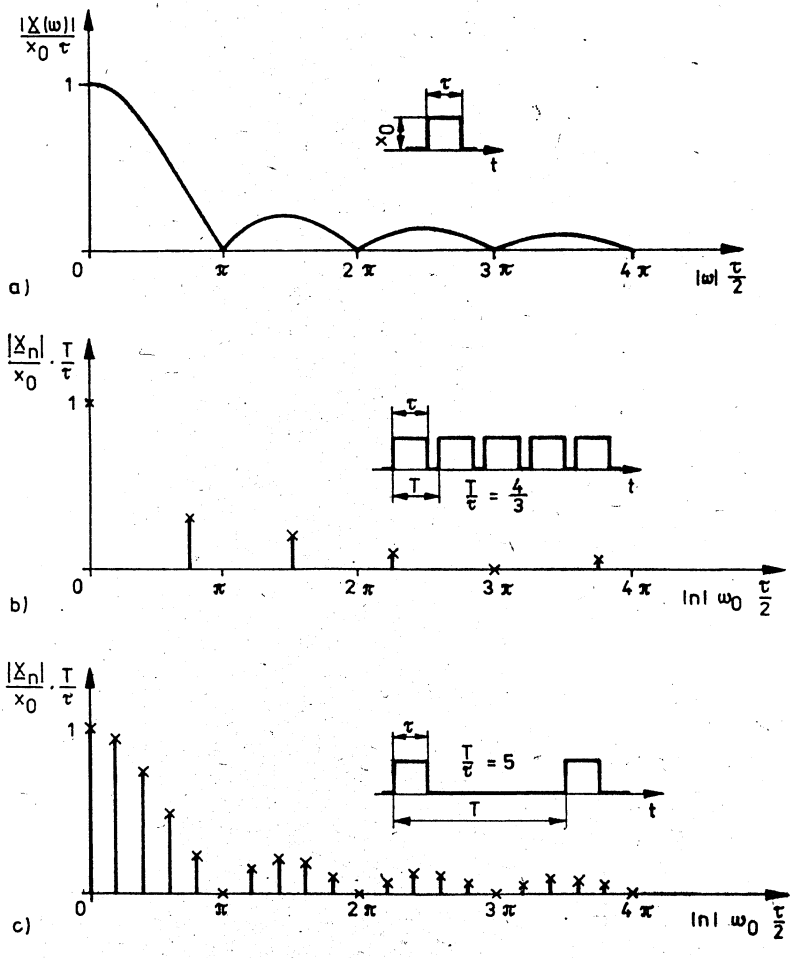


Bild 3.11 Verlauf der Spektraldichte eines Einzelvorganges und des Linienspektrums des gleichen, aber periodisch wiederholten Vorganges

a) Einzelvorgang

b) und c) periodisch wiederholter Vorgang

Der Hüllkurvenverlauf des Spektrums des periodisch wiederholten Impulses entspricht somit dem Spektrum des Einzelimpulses. Dennoch können sich die Spektren von Rechteckimpulsfolgen bei gleichem τ stark voneinander unterscheiden: wenn T nur wenig größer als τ ist. Bild 3.11 zeigt den Verlauf der Spektraldichte eines Einzelvorganges und das Linienspektrum des gleichen, aber periodisch wiederholten Vorganges bei zwei verschiedenen T/τ-Verhältnissen. Aus dem Linienspektrum der Impulsfolge mit einem Tastverhältnis $\frac{T}{\tau} = \frac{4}{3}$ läßt sich nicht auf den Verlauf des Betrages der Spektraldichte des Einzelimpulses schließen, da die Hüllkurve durch zu wenig Punkte markiert ist. Dagegen ist aus dem Hüllkurvenverlauf bei $\frac{T}{\tau} = 5$ sehr gut der Verlauf der Spektraldichte des Einzelimpulses zu erkennen.

Schreibt man nun vor, daß im Linienspektrum des wiederholten Vorganges zwischen zwei Nullstellen der Spaltfunktion, die im Abstand π aufeinanderfolgen, wenigstens 5 Spektrallinien vorhanden sein sollen, dann wird somit

$$\omega \frac{\tau}{2} = 5\, \omega_0 \frac{\tau}{2} = 5 \cdot 2\,\pi \frac{1}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \leq \pi \,, \qquad (3.32)$$

$$T \geq 5\,\tau \,.$$

Nicht nur für Rechteckimpulse, sondern für Impulse mit beliebigem Zeitverlauf kann man abschätzen, daß bei einer Wiederholperiode, die wenigstens fünfmal so groß ist wie die Dauer des Einzelimpulses, aus dem Verlauf des Linienspektrums mit für die Praxis genügender Genauigkeit auf die Spektraldichte des Einzelimpulses geschlossen werden kann.
Entsprechend muß für die Breite der für die Analyse verwendeten Filter, wenn noch eine ausreichende Auflösung der Detailstruktur des Spektrums erhalten werden soll, gefordert werden

$$\Delta f \leq \frac{1}{5\,\tau} \,.$$

3.5. Kurzzeitanalyse - Zeitfensterung

Es gibt zahlreiche Anwendungsfälle, in denen Zeitabschnitte einer Zeitfunktion analysiert werden sollen, um auf der Grundlage der dabei gewonnenen Merkmale eine Klassifizierung des Zeitabschnittes durchführen zu können.

Beispiele: automatische Sprachanalyse, Maschinendiagnostik, Echtzeitanalyse von Maschinenlärm, objektive Audiometrie, Ortungstechniken, EEG- und EKG-Analyse.
Für den ausgewählten Zeitabschnitt können verschiedene Kenngrößen im Zeit- oder Frequenzbereich ermittelt werden. In diesem Abschnitt soll nur die Frequenzanalyse untersucht werden.

In Anlehnung an das Spektrum für zeitbegrenzte Vorgänge nach Gl. (3.16) definieren wir für unbegrenzte Vorgänge das Kurzzeitspektrum oder Zeitfrequenzspektrum

$$\underline{X}_k(\omega, t) \overset{\text{Def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \,. \qquad (3.33)$$

Dabei ist $h(\tau)$ eine Gewichtsfunktion mit der die Zeitfunktion $x(\tau)$ bewertet wird. Ist $h(\tau)$ zeitbegrenzt, dann ist auch $x(\tau)\, h(t-\tau)$ zeitbegrenzt. Wir können $h(t-\tau)$ auch als eine Art Zeitfenster ansehen, durch das die Zeitfunktion zur Zeit t betrachtet und analysiert wird. Im Bild 3.12 ist die Bewertung einer amplitudenmodulierten Zeitfunktion mit einer Exponentialfunktion dargestellt.

Mit der Bewertungsfunktion $h(t-\tau)$ erfolgt also eine rückwärts gerichtete Bewertung des Zeitvorganges, so wie es eine Echtzeitanalyse erfordert.
In der Literatur (z. B. in Fritzsche (1985)) wird als Bewertungsfunktion mitunter $h(\tau - t)$ angegeben. Erklären Sie den Unterschied!

Der Betrag des Kurzzeitspektrums kann als Funktion der Zeit und der Frequenz dreidimensional dargestellt werden (Bild 3.13).

Durch die Bewertungsfunktion wird das Spektrum der originalen Zeitfunktion x(t) verändert. Wird zum Beispiel aus einer Zeitfunktion x(t) zur Zeit t_0 ein Abschnitt mit einer Bewertungsfunktion herausgeschnitten, so gilt die Korrespondenz:

$$x(t) \cdot h(t_0 - t) \longleftrightarrow \underline{X}(\omega) * \underline{H}(\omega) \,,$$

$$\underline{X}(\omega) = \text{FT}\, x(t) \quad \text{und} \quad \underline{H}(\omega) = \text{FT}\, h(t_0 - t) \,.$$

Durch die Faltung des Spektrums der Zeitfunktion im Frequenzbereich wird das ursprüngliche Spektrum der Zeitfunktion verbreitert.

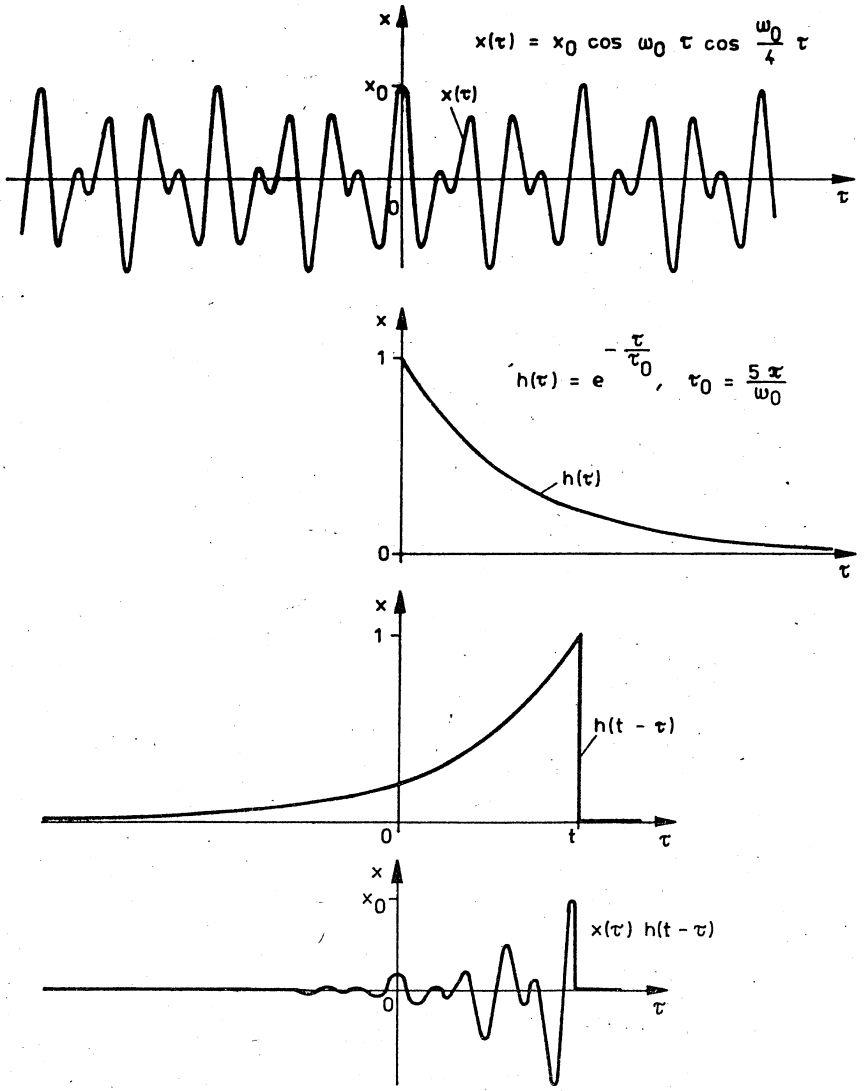


Bild 3.12 Bewertung einer Zeitfunktion $x(\tau)$ mit einem Zeitfenster $h(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$

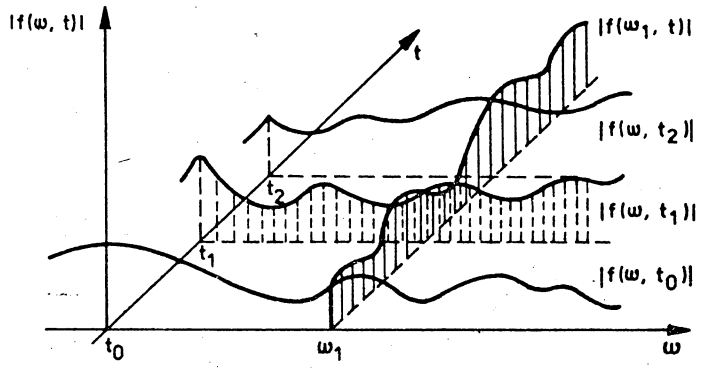


Bild 3.13 Dreidimensionale Darstellung eines Kurzzeitspektrums

Wir betrachten als Beispiel eine sinusförmige Zeitfunktion

$$x(t) = \cos \omega_0 t \quad \longleftrightarrow \quad \underline{X}(\omega) = \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right] . \tag{3.34}$$

Die sinusförmige Zeitfunktion $x(t) = \cos \omega_0 t$ hat also lediglich diskrete Spektrallinien bei den Frequenzen $\omega = \pm\omega_0$.

Multiplizieren wir $x(t)$ mit einer Bewertungsfunktion $h(t)$, so erhalten wir

$$x(t) \cdot h(t) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{X}(\omega) * \underline{H}(\omega) \; ; \tag{3.35}$$

für $x(t) = \cos \omega_0 t$ ist

$$\underline{X}(\omega) * \underline{H}(\omega) = \pi \left[\underline{H}(\omega - \omega_0) + \underline{H}(\omega + \omega_0)\right] . \tag{3.36}$$

Gl. (3.36) bedeutet aber, daß das Spektrum der mit $h(t)$ bewerteten Zeitfunktion $x(t) = \cos \omega_0 t$ nicht nur Spektrallinien bei $\omega = \pm\omega_0$ aufweist, sondern Frequenzbänder der Gestalt des Spektrums der Bewertungsfunktion (d. h. des Zeitfensters), die sich um die Winkelfrequenzen $\pm\omega_0$ gruppieren. Im Bild 3.14 ist in einer prinzipiellen Skizze gezeigt, wie sich das Spektrum der sinusförmigen Zeitfunktion durch die Bewertung (Zeitfensterung) mit einem gaußförmigen Zeitfenster verbreitert.

Die im Bild 3.9 dargestellten Korrespondenzen $x(t) \longleftrightarrow \underline{X}(\omega)$ gelten auch für Korrespondenzen $h(t) \longleftrightarrow \underline{H}(\omega)$. Im Bild 3.15 sind für einige ausgewählte und bevorzugte Zeitfenster der Zeitverlauf $h(t)$ und der Dämpfungsverlauf $20 \lg \left|\frac{\underline{H}(f)}{\underline{H}(0)}\right|$ der Frequenzfenster dargestellt worden ($\underline{H}(f) \mathrel{\hat{=}} \underline{H}(\omega)$).

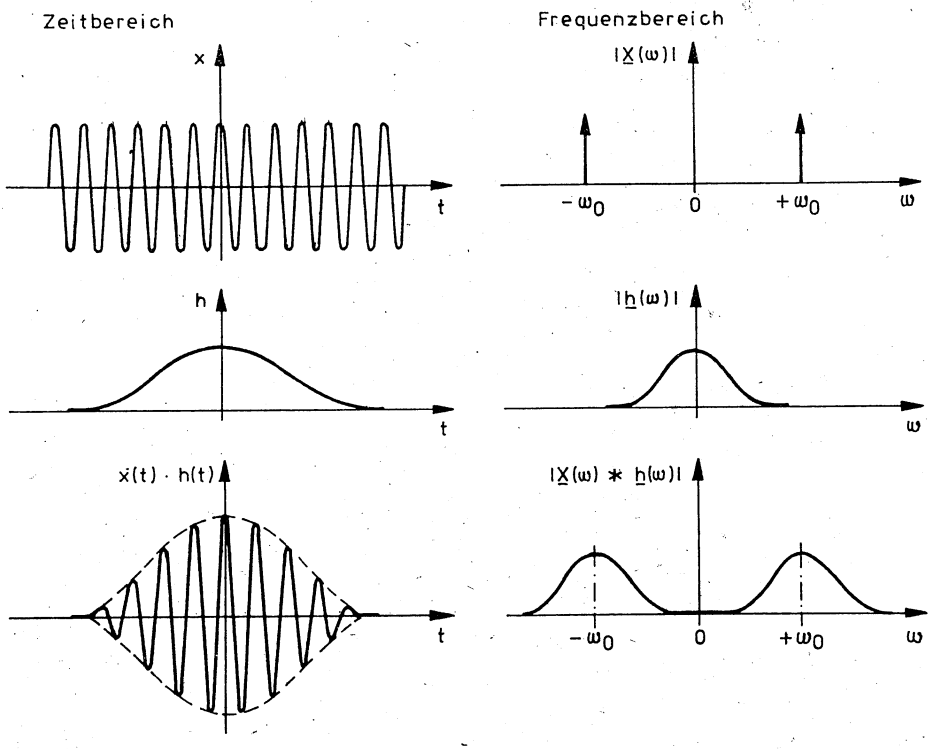


Bild 3.14 Prinzipielle Skizze von Zeit- und Frequenzverlauf einer mit einem gaußförmigen Zeitfenster bewerteten sinusförmigen Zeitfunktion

Rechteckfenster werden wegen ihrer im Zeitbereich einfach zu realisierenden Struktur verwendet. Sie haben aber einen sehr ausgedehnten Frequenzverlauf. Der originale Frequenzverlauf der Zeitfunktion wird somit durch die Fensterung weit verbreitert. Wegen der scharfen Begrenzung des Frequenzfensters werden Hanning- oder Hamming-Fenster bevorzugt. Bei dem wohl am häufigsten verwendeten Hanning-Fenster ist das zweite Maximum bereits um 32 dB $\left(\left|\frac{\underline{H}(f)}{\underline{H}(0)}\right| \approx \frac{1}{40}\right)$ gedämpft, die weiteren Maxima fallen mit 18 dB/Oktave ab. Bei dem etwas schwerer zu realisierenden Hamming-Fenster sind alle Nebenmaxima um mehr als 40 dB $\left(\left|\frac{\underline{H}(f)}{\underline{H}(0)}\right| \approx \frac{1}{100}\right)$ gedämpft. Weit ab vom Hauptmaximum fallen

sie jedoch nur, so wie die Maxima des Rechteckfensters, mit 6 dB/Oktave ab.

Geben Sie die um t_0 zum Zeitachsenursprung verschobenen Zeitverläufe der Zeitfenster nach Bild 3.15 und die sich dann ergebenden Frequenzverläufe an! Wie ändern sich dann die Dämpfungsverläufe im Vergleich zu Bild 3.15?

3.6. Analysierschärfe

Aus den Bildern 3.9 und 3.15 geht hervor, daß ein reziproker Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzfensterbreite besteht: das Frequenzfenster ist um so schmaler je breiter das Zeitfenster und umgekehrt.
Wir wollen den Zusammenhang von Zeit- und Frequenzfensterbreite an einem Gauß-Fenster untersuchen.
Für ein Zeitfenster

$$h(t) = e^{-(\frac{K\,t}{\Delta t})^2} \tag{3.37}$$

wird (siehe Bild 3.9 oder 3.15)

$$\underline{H}(f) = \sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta f}}\, e^{-(\frac{K\,f}{\Delta f})^2} \tag{3.38}$$

mit $K^2 = \pi\ \Delta t\ \Delta f$.
Das heißt, wir haben einen gleichartigen Verlauf von Zeit- und Frequenzfenster unter der Bedingung

$$\Delta t\ \Delta f = \frac{K^2}{\pi}\ . \tag{3.39}$$

Die Festlegung von K^2 hängt von der Definition der Zeitfensterbreite ab. Bei der Fensterbreite Δt bzw. Δf sind $h(t)$ bzw. $\underline{H}(f)$ auf $e^{-(\frac{K}{2})^2} \cdot 100\ \%$ des Maximalwertes abgeklungen.
Setzen wir $K^2 = \pi$, dann wird

$$\boxed{\Delta t\ \Delta f = 1\ .} \tag{3.40}$$

Es ist dann $e^{-(\frac{K}{2})^2} \cdot 100\ \% = 45{,}6\ \%$.

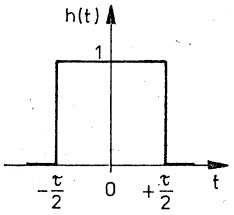
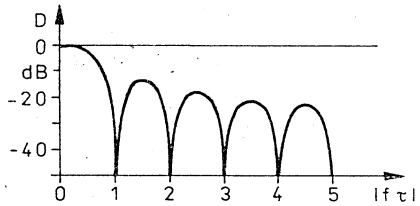
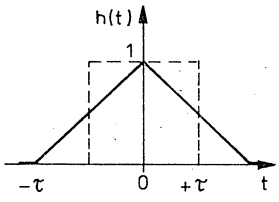
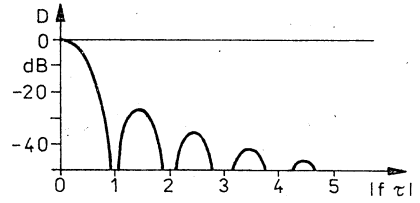
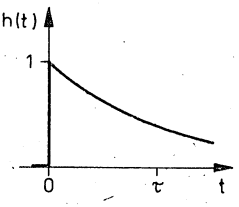
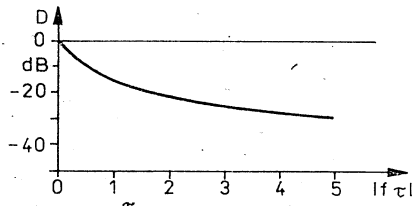
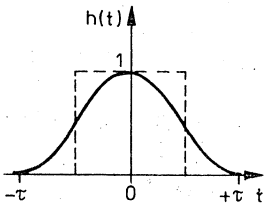
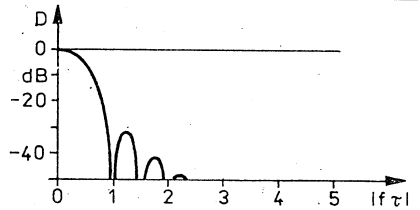
Zeitverlauf		Frequenzverlauf
Rechteckfenster $h(t) = re\left(2\,\frac{t}{\tau}\right)$		 $\underline{H}(f) = \tau\ si\ (\pi\ f\ \tau)$
Dreieckfenster $h(t) = dr\left(2\,\frac{t}{\tau}\right)$		 $\underline{H}(f) = \tau\ si^2\ (\pi\ f\ \tau)$
Exponentialfenster $h(t) = \dot{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ für $t \geq 0$ $h(t) = 0$ sonst		 $\underline{H}(f) = \frac{\tau}{1 + j\,2\,\pi\,f\,\tau}$
Hanning-Fenster $h(t) = \cos^2\frac{\pi\,t}{2\,\tau}$ für $-\tau \leq t \leq \tau$ $h(t) = 0$ sonst		 $\underline{H}(f) = \tau\ \frac{si\ (2\ \pi\ f\ \tau)}{1 - (2\ f\ \tau)^2}$

Bild 3.15 Häufig verwendete Zeitfenster und Dämpfungsverlauf der zugehörigen Frequenzfenster:

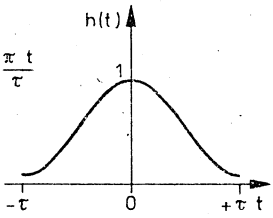
$$D = 20\ lg\ \frac{\underline{H}(f)}{\underline{H}(0)} = 20\ lg\ \frac{\underline{H}(\omega)}{\underline{H}(0)}$$

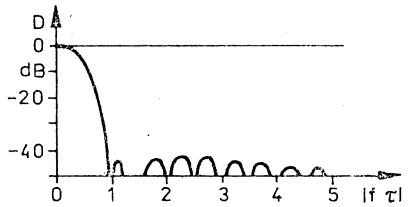
Hamming-Fenster

$h(t) = 0{,}54 + 0{,}46 \cos \frac{\pi t}{\tau}$

für $-\tau \leq t \leq \tau$

$h(t) = 0$ sonst



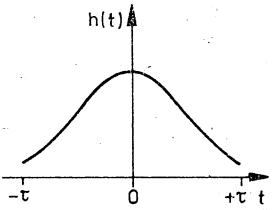


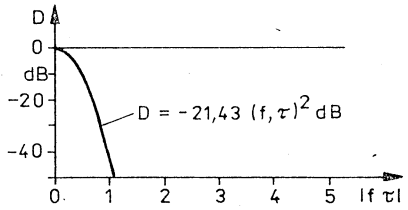
$$\underline{H}(f) = 2\tau \, si(2\pi f \tau) \, \frac{0{,}54 - 0{,}08\,(2 f \tau)^2}{1 - (2 f \tau)^2}$$

Gauß-Fenster

$h(t) = e^{-2\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$

(Zeitverlauf an Hamming-Fenster angenähert)

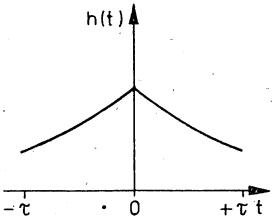


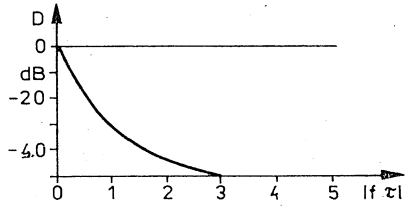


$$\underline{H}(f) = \tau \sqrt{\frac{\pi}{2}} \; e^{-\frac{1}{2}(\pi f \tau)^2}$$

Symmetrisches Exponentialfenster

$h(t) = e^{-\frac{|t|}{\tau}}$





$$\underline{H}(f) = \frac{2\tau}{1 + (2\pi f \tau)^2}$$

Bild 3.15 (Fortsetzung)

Gl. (3.40) wird auch als Unschärferelation bezeichnet. Abgesehen von der willkürlichen Festlegung von $K^2/\pi = 1$, gilt die Unschärferelation nach Gl. (3.40) für jede Art von Zeit- oder Frequenzfenstern. Aus einer Zeitfunktion kann entweder ein kurzer Abschnitt mit geringer Frequenzgenauigkeit oder ein langer Abschnitt mit hoher Frequenzgenauigkeit analysiert werden.

3.7. Zeitfunktionsanalyse mit Bandfiltern

3.7.1. Begriffe und Zusammenhänge

Die Spektralanalyse mit analogen Schaltkreisen wird vorwiegend mit Bandfiltern durchgeführt. Die zu analysierende Zeitfunktion wird dabei zum Beispiel auf parallelgeschaltete Bandfilter gegeben, deren Durchlaßbereiche aneinander angrenzen. Die an den Bandfilterausgängen anliegenden Spannungen werden über kurze Zeitabschnitte gemittelt, abgetastet und registriert oder oszillografisch zur Anzeige gebracht. In Bild 3.16 ist das Blockschaltbild eines Echtzeitanalysators für akustische Messungen dargestellt.

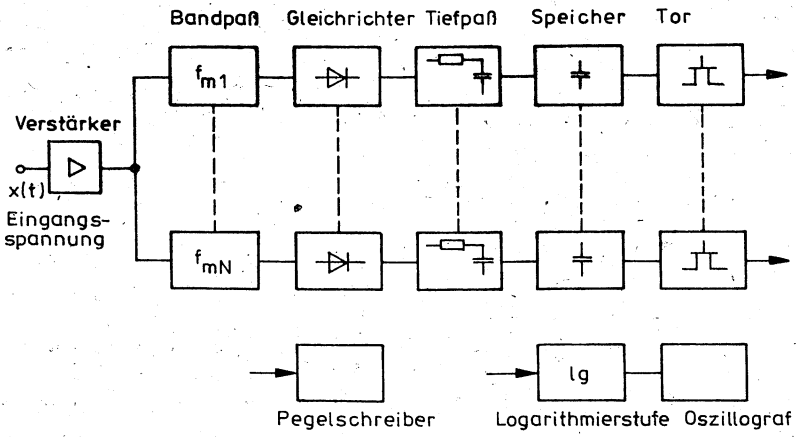


Bild 3.16 Blockschaltbild eines Echtzeitanalysators für akustische Messungen

Bei stationären Vorgängen werden oft auch im Frequenzbereich aneinander angrenzende Bandfilter nacheinander zur Analyse von Zeitfunktionen verwendet. Im akustischen Frequenzbereich sind das dann vorwiegend Filter mit relativ konstanter Bandbreite, d. h., die Bandbreite, bezogen auf die Mittenfrequenz, ist konstant. Meist werden hierbei Terz- oder Oktavfilter verwendet.

Gilt f_o obere Frequenzgrenze eines Filter,
f_u untere Frequenzgrenze eines Filters,
$f_m = \sqrt{f_o \, f_u}$ Filtermittenfrequenz,
$\Delta f = f_o - f_u$ Filterbandbreite,

dann wird für

Oktavfilter: $f_o = 2 \, f_u$, relative Bandbreite $\frac{\Delta f}{f_m} = 0{,}707$,

Terzfilter: $f_o = \sqrt[3]{2} \, f_u$, relative Bandbreite $\frac{\Delta f}{f_m} = 0{,}232$.

Kontrollieren Sie die Angaben für die relative Bandbreite!
Zur Analyse von stationären Vorgängen werden auch Durchlauffilter mit konstanter absoluter Bandbreite (Δf = konst.) oder mit konstanter relativer Bandbreite ($\Delta f / f_m$ = konst.) verwendet. Bei Durchlauffiltern durchläuft die Mittenfrequenz kontinuierlich den zu analysierenden Frequenzbereich.
Zur Zeitfunktionsanalyse verwendete Bandfilter sind lineare Zweitore, deren Übertragungsverhalten nach Anhang 1 und 2, Lehrbrief 3, durch die Übertragungsfunktion $\underline{A}(\omega)$ oder durch die Gewichtsfunktion $g_E(t)$ beschrieben werden kann.
Übertragungsfunktion und Gewichtsfunktion sind durch die Fouriertransformation miteinander verknüpft:

$$\underline{A}(\omega) = \mathrm{FT}\, g_E(t) \longleftrightarrow g_E(t) = \mathrm{FT}^{-1}\, \underline{A}(\omega) \; .$$

Bei einem Bandfilter ist die Übertragungsfunktion $\underline{A}(\omega)$ offensichtlich ein Frequenzfenster. Alle Frequenzbestandteile, die im Durchlaßbereich des Filters liegen, werden bei der Analyse ausgefiltert. Somit entspricht die Gewichtsfunktion $g_E(t)$ als die Fouriertransformierte der Übertragungsfunktion einem Zeitfenster. Bei fortlaufender Analyse blendet $g_E(t)$ einen rückwärtigen Zeitabschnitt aus der Zeitfunktion $x(t)$ aus, $A(\omega)$ blendet einen Frequenzabschnitt aus dem Spektrum der Zeitfunktion $\underline{X}(\omega)$ aus.

Die Ausblendung des Zeitfensters aus der laufenden Zeitfunktion können wir uns, wie im Bild 3.12 gezeigt, durch ein Umklappen (Faltung) der Gewichtsfunktion vorstellen. Im Analysemoment ist die zeitlich rückwärts gespiegelte Gewichtsfunktion die momentane Bewertungsfunktion für rückwärtige Werte der Zeitfunktion.

3.7.2. Beispiele

Für einige idealisierte oder ausgewählte Filter sind nachfolgend Frequenzfenster ($\hat{=}$ Übertragungsfunktion $\underline{A}(\omega)$) und Zeitfenster ($\hat{=}$ Gewichtsfunktion $g_E(t)$) einander gegenübergestellt worden.

Die Berechnung der korrespondierenden Größe $g_E(t)$ aus $\underline{A}(\omega)$ bzw. $\underline{A}(\omega)$ aus $g_E(t)$ erfolgt entweder durch unmittelbare Lösung der Fourierintegrale (a) oder, bei vorgegebener Schaltungsstruktur (b, c), mit Hilfe der Residuen nach dem im Anhang 3, Lehrbrief 3, dargestellten Verfahren.

a) Idealer Bandpaß

Ein idealer Bandpaß hat eine Übertragungsfunktion $|\underline{A}(\omega)| = 1$ in einem vorgegebenen Frequenzband und $|\underline{A}(\omega)| = 0$ im übrigen Frequenzbereich. Damit er durch diskrete Schaltelemente näherungsweise realisierbar ist, muß er folgendes Verhalten besitzen:

$$\underline{A}(\omega) = e^{-j2\pi(f-f_m)t_L} \quad \text{für} \quad f_m - \frac{\Delta f}{2} < f < f_m + \frac{\Delta f}{2}$$

$$\underline{A}(\omega) = 0 \qquad \text{sonst .}$$

Hierbei bedeutet:

f_m Filtermittenfrequenz,
Δf Bandbreite,
t_L Phasenlaufzeit.

$$g_E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega ,$$

$$g_E(t) = \frac{\Delta\omega}{\pi} \operatorname{si} \frac{\Delta\omega}{2} (t - t_L) \cos \omega_m t .$$

b) L-R-Tiefpaß

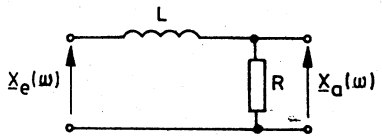


Bild 3.17 L-R-Tiefpaß

$$\underline{A}(\omega) = \frac{R}{j\,\omega\,L + R} .$$

Mit $\tau = \frac{L}{R}$ wird

$$\underline{A}(\omega) = \frac{-\frac{j}{\tau}}{\omega - \frac{j}{\tau}} .$$

Nach Anhang 3 ist

$$g_E(t) = \frac{1}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{für } t \geq 0 ,$$

$$g_E(t) = 0 \qquad \text{sonst} .$$

c) Reihenschwingkreis

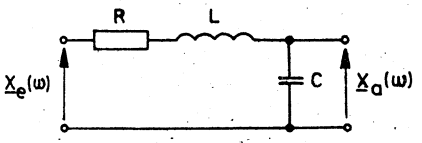


Bild 3.18 Reihenschwingkreis

$$\underline{A}(\omega) = \frac{\frac{1}{j\,\omega\,C}}{R + j\,\omega\,L + \frac{1}{j\,\omega\,C}} .$$

Mit $\omega_0^2 = \frac{1}{L\,C}$ und $Q = \frac{\omega_0\,L}{R}$ wird

$$A(\omega) = \frac{-\omega_0^2}{\omega^2 - j\,\frac{\omega_0}{Q} - \omega_0^2} .$$

Mit den Polen von $\underline{A}(\omega)$, also den Nullstellen des Nenners, $\omega_{1,2} = j\,\frac{\omega_0}{2\,Q} \pm \omega_0\,K$, $K^2 = \left(1 - \frac{1}{4\,Q^2}\right)$, ergibt sich mit Gl. (A.10) aus Anhang 3, Lehrbrief 3,

$$g_E(t) = \frac{\omega_0}{K}\, e^{-\frac{\omega_0}{2\,Q}\,t} \sin K\,\omega_0\,t \qquad \text{für } t \geq 0 ,$$

$$g_E(t) = 0 \qquad \text{für } t < 0 .$$

Werden Gewichtsfunktionen angestrebt, die ein nur positivwertiges Zeitfenster besitzen, wie z. B. die Fensterfunktionen im Bild 3.15, dann zeigt der Frequenzverlauf immer ein Tiefpaßverhalten. So hat zum Beispiel das Gauß-Zeitfenster Tiefpaßcha-

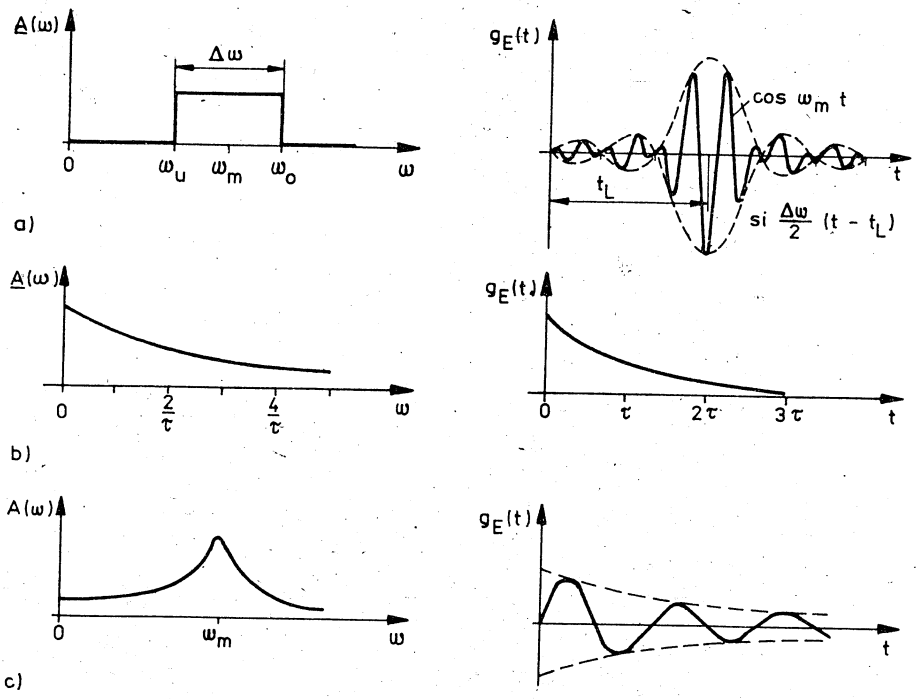


Bild 3.19 Frequenzverlauf der Obertragungsfunktion $\underline{A}(\omega)$ und Zeitverlauf der Gewichtsfunktion $g_E(t)$ der im Abschnitt 3.7. untersuchten Filter

a) Idealer Bandpaß; b) L-R-Tiefpaß; c) Reihenschwingkreis

rakter. Wird einem Filter eine Obertragungsfunktion wie einem Gauß-Filter, aber mit Bandpaßcharakter gegeben, dann hat die Bewertungsfunktion im Zeitbereich eine Gauß-Funktion als Hüllkurve, der aber eine sinusförmige Zeitfunktion mit der Mittenfrequenz des Bandfilters eingeschrieben ist.

In Bild 3.19 sind für die drei Beispiele die Obertragungsfunktion (Frequenzfenster) und die Gewichtsfunktion (Zeitfenster) anschaulich dargestellt worden.

3.7.3. Aufgaben

Lösen Sie die Aufgaben 7 bis 9, Lehrbrief 3!
Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgaben 8 und 9 den Residuensatz aus Anhang 3, Lehrbrief 3.

3.8. Zusammenhang von Fourier- und Laplacetransformation

Für die Anwendung der Fouriertransformation ist vorausgesetzt, daß die zu analysierende Funktion $x(t)$ betragsintegrierbar ist: dann konvergiert das zu lösende Integral (3.16). Bei der Systemanalyse werden häufig Zeitfunktionen verwendet, und es ergeben sich Systemantworten, die nicht betragsintegrierbar sind, für die aber vorausgesetzt werden kann, daß sie vor der Zeit $t = 0$ den Wert Null besitzen. In diesem Fall ist es vorteilhaft, im Fourierintegral an Stelle der Funktion $x(t)$ die Funktion $x(t)\, e^{-\delta t}$ einzuführen, um damit Konvergenz des Integrals zu erreichen. Dann kann der Integrand in (3.16) aber auch umgeschrieben werden

$$x(t)\, e^{-\delta t}\, e^{-j\omega t} = x(t)\, e^{-(j\omega+\delta)t} = x(t)\, e^{-pt}$$

mit $p = j\omega + \delta$.
Man kommt damit zur Laplacetransformation:

$$F(p) = LT\, x(t) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-pt}\, dt\,, \qquad (3.41)$$

$$x(t) = LT^{-1}\, F(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\omega}^{\delta+j\omega} F(p)\, e^{pt}\, dp\,. \qquad (3.42)$$

Bei der Untersuchung von Systemantworten auf Modell-Testsignale ist bei der Rücktransformation (3.42) die Integration in einem Bereich durchzuführen, in dem δ konstant ist, d. h. entlang einer Geraden, die in der komplexen p-Ebene parallel zur $j\omega$-Achse verläuft. Mit Hilfe des Residuensatzes der Funktionentheorie kann (3.42) dann häufig leicht gelöst werden (siehe hierzu: Wunsch (1970), Fritzsche (1983)(1985)). Wir wollen hier nicht näher auf die Laplacetransformation und ihre Verwandtschaft zur Fouriertransformation eingehen. Die Signale, an deren

meßtechnische Erfassung und Verarbeitung hier gedacht ist, liegen immer in endlichen Zeitabschnitten vor. Konvergenzschwierigkeiten treten bei dieser praktischen Verarbeitung nicht auf.

4. Analyse von Signalen mit Rechteckfunktionen

Es gibt einige Rechteckfunktionssysteme, die für die Analyse von Signalen geeignet sind und die angewendet werden. Sie haben den Vorteil, daß der Berechnungsaufwand auf Digitalrechnern verhältnismäßig gering ist. Mitunter können auch Zeitfunktionen mit einer viel geringeren Koeffizientenzahl, bei gleichem Restfehler, durch Rechteckfunktionen beschrieben werden als durch harmonische Funktionen.
Ein wesentlicher Nachteil dieser Funktionssysteme ist, daß bei der Untersuchung von linearen Zweitoren keine so einfache Verknüpfung von Eingangsgrößen, Systemkenngrößen und Ausgangsgrößen besteht wie bei der Anwendung von harmonischen Funktionen.

4.1. Mäanderfunktionen

Das hier vorgestellte System der Mäanderfunktionen wird im Vergleich zu anderen Rechteckfunktionssystemen am häufigsten verwendet. Es ist aus dem Walsh-Funktionssystem hervorgegangen und wird mitunter auch als solches bezeichnet, z. B. in Woschni (1981). So wie die Aufbaufunktionen den harmonischen Funktionen ähneln, sind auch die Bezeichnungen in diesem System an die der Systeme mit harmonischen Funktionen angelehnt worden.
Im Mäanderfunktionssystem besitzen die Aufbaufunktionen, so wie die harmonischen Funktionen, einen Definitionsbereich, der sich bis ins positiv und negativ unendliche der Zeitachse erstreckt. Alle Aufbaufunktionen dieses Systems können nur Werte von +1 und -1 annehmen. Transformationen nach diesen Funktionen lassen sich deshalb auf Digitalrechnern gut durchführen. Bild 4.1 zeigt die Aufbaufunktionen für die ersten acht ganzzahligen Werte des Argumentes. Zur Beschreibung der Aufbaufunktionen werden in Gegenüberstellung mit den harmonischen Funktionen folgende Parameter verwendet:

Mäanderfunktionen		harmonische Funktionen
schiefsymmetrische Funktionen: $f(t) = -f(-t)$		
sal (Φ, t, t_0)		sin (f, t, φ)
sal (μ, Θ, Θ_0)	normiert	sin (ν, Θ, φ)
symmetrische Funktionen: $f(t) = f(-t)$		
cal (Φ, t, t_0)		cos (f, t, φ)
cal (μ, Θ, Θ_0)	normiert	cos (ν, Θ, φ)

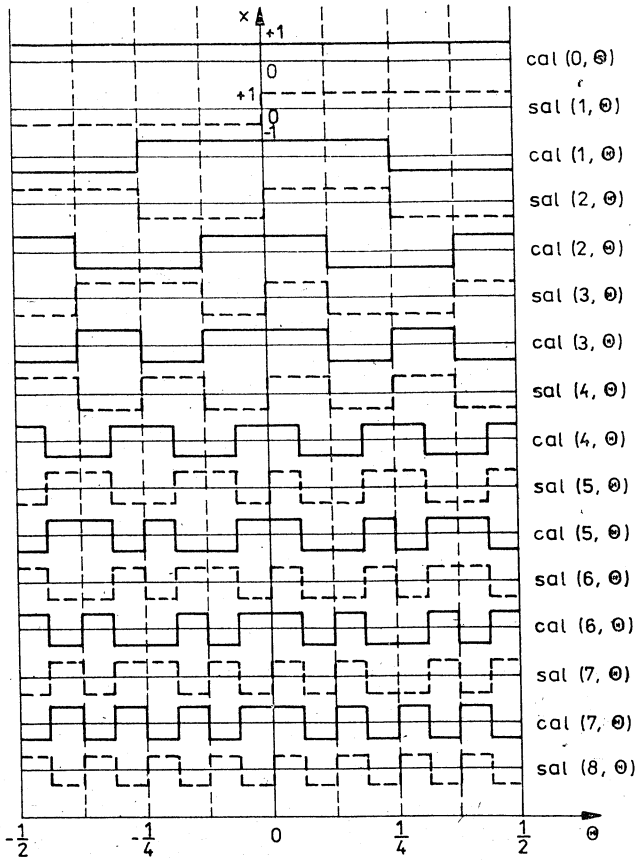


Bild 4.1 System der orthogonalen Mäanderfunktionen für i = 0 ÷ 8

Die Symmetrie bezieht sich auf den Nullpunkt der Zeitachse. Symmetrische und schiefsymmetrische Funktionen lassen sich durch Phasen- oder Zeitverschiebung ineinander überführen.

Es bedeutet:

Φ Sequenz (Einheit: ps),

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{mittlere Zahl der Zeichenwechsel}}{\text{Zeitbasis } T_0},$$

$$1\ \text{ps} = \frac{2\ \text{Zeichenwechsel}}{\text{Sekunde}},$$

normierte Sequenz:

$$\mu = \Phi\, T_0,$$

normierte Zeit:

$$\Theta = \frac{t}{T_0},$$

f Frequenz (Einheit: Hz)

$$f = \frac{\text{Anzahl sinusförmiger Schwingungen}}{\text{Zeitbasis } T_0}$$

$$1\ \text{Hz} = \frac{1\ \text{Schwingung}}{\text{Sekunde}};$$

normierte Frequenz:

$$\nu = \frac{f}{f_0} = f\, T_0;$$

normierte Zeit:

$$\Theta = \frac{t}{T_0}.$$

Beschränkt man sich auf ganzzahlige Werte von μ, dann wird für μ häufig i geschrieben.

Zur mathematischen Definition sowie zur praktischen Erzeugung des Mäanderfunktionssystems werden verschiedene Möglichkeiten angegeben. Eine Methode geht von den sog. Rademacher-Funktionen aus. Die Rademacher-Funktionen sind die Funktionen mit konstantem Tastverhältnis, also die Sal- und Cal-Funktionen für $i = 2^n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Die Rademacher-Funktionen können durch Teilung bzw. Vervielfachung aus einer vorgegebenen Rademacher-Funktion gewonnen werden. Alle weiteren Aufbaufunktionen (sal, cal) lassen sich als Produkte der Rademacher-Funktionen darstellen.
Andere Definitionen gehen von Differenzgleichungen oder Rekursionsformeln aus.
Die Orthogonalität des Funktionssystems läßt sich unmittelbar aus seiner Darstellung über dem Argument (Bild 4.1) ablesen.

Das Orthogonalitätsintervall liegt zwischen

$$-\frac{1}{2} \leqq \Theta \leqq +\frac{1}{2};$$

Orthogonalitätsbedingung:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \begin{matrix} \text{cal} \\ \text{sal} \end{matrix} \{i, \Theta\} \begin{matrix} \text{cal} \\ \text{sal} \end{matrix} \{j, \Theta\} \, d\Theta = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j \end{cases} .$$

Das Funktionssystem ist orthonormal und vollständig.

4.1.1. Darstellung periodischer Zeitfunktionen

Aus Gl. (2.5) folgt unter Berücksichtigung der Zeitnormierung und der Orthonormalität der Aufbaufunktionen:

$$X_c(i) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(\Theta) \, \text{cal}\,(i, \Theta)\, d\Theta \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) . \tag{4.1}$$

$$X_s(i) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(\Theta) \, \text{sal}\,(i, \Theta)\, d\Theta \quad (i = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{4.2}$$

Die Rücktransformationsbeziehung lautet dann:

$$x(\Theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[X_c(i) \, \text{cal}\,(i, \Theta) + X_s(i) \, \text{sal}\,(i, \Theta) \right] . \tag{4.3}$$

(In Gl. (4.3) ist sal (0, Θ) = 0.)

Das berechnete Spektrum ist ein Linienspektrum.

Beispiel:

Eine Dreieckimpulsfolge nach Bild 4.2 soll in Mäanderfunktionen zerlegt werden.

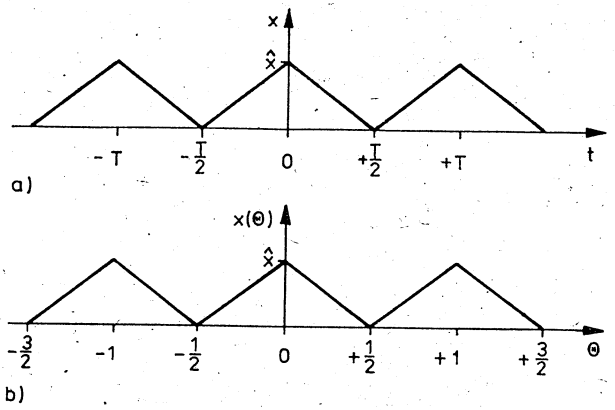


Bild 4.2 Dreieckimpulsfolge

a) Zeitdarstellung
b) Darstellung über normierter Zeitachse

Wegen der Symmetrie des Vorganges entfallen alle Komponenten mit Sal-Funktionen: $X_s(i) = 0$.

Aus Gl. (4.1) folgt mit den Bildern 4.1 und 4.2 für die Komponenten bis i = 4:

$$X_c(0) = \frac{1}{2}\,\hat{x},$$

$$X_c(1) = 2\,(-\frac{1}{16} + \frac{3}{16})\,\hat{x} = \frac{1}{4}\,\hat{x},$$

$$X_c(2) = 0, \quad X_c(3) = \frac{1}{8}\,\hat{x}, \quad X_c(4) = 0 \ldots$$

Bild 4.3 zeigt die grafische Darstellung des Linienspektrums der Dreieckimpulsfolge bis i = 4 und den Aufbau einer Periode der Dreieckimpulsfolge aus den ersten drei nicht verschwindenden Aufbaufunktionen.

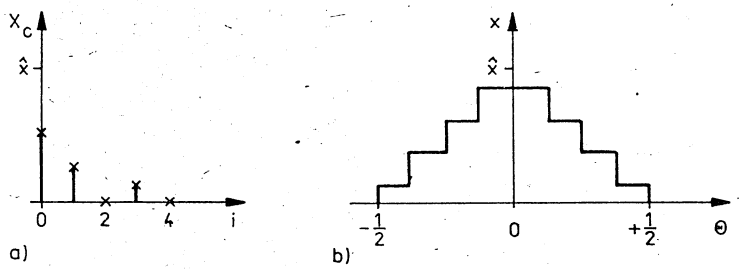


Bild 4.3 a) Mäanderfunktionsspektrum bis i = 4
b) $x(\Theta) = X_c(0)\ \mathrm{cal}\ (0, \Theta) + X_c(1)\ \mathrm{cal}\ (1, \Theta) + X_c(3)\ \mathrm{cal}\ (3, \Theta)$, die aus den ersten drei nicht verschwindenden Aufbaufunktionen rekonstruierte Zeitfunktion im normierten Zeitmaßstab.

4.1.2. Aperiodische Funktionen

Zur Darstellung aperiodischer Funktionen, die betragsintegrierbar sind, läßt sich eine dem Fourierintegral entsprechende Integraltransformation finden:

$$a_c(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\Theta)\ \mathrm{cal}\ (\mu, \Theta)\ d\Theta\ , \tag{4.4}$$

$$a_s(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\Theta)\ \mathrm{sal}\ (\mu, \Theta)\ d\Theta\ . \tag{4.5}$$

Rücktransformation:

$$x(\Theta) = \int_{0}^{+\infty} \left[a_c(\mu)\ \mathrm{cal}\ (\mu, \Theta) + a_s(\mu)\ \mathrm{sal}\ (\mu, \Theta)\right] d\mu\ . \tag{4.6}$$

Es ist zu beachten, daß die Transformierten $a_s(\mu)$ und $a_c(\mu)$ durch die Zeitnormierung in Gl. (4.4) und Gl. (4.5) von der Grundperiode T_0 des gewählten Funktionssystems abhängig sind. Das ist beim Fourierintegral für harmonische Funktionen nicht der Fall.

T_0 kann beliebig gewählt werden, es muß nur gleich groß oder größer als die Dauer des zu analysierenden, zeitbegrenzten Vorganges sein.

Die Funktionstransformation für aperiodische Vorgänge nach den Gleichungen (4.4) bis (4.6) erfordert die Existenz von Aufbaufunktionen für nichtganzzahlige μ. Form der Aufbaufunktionen und Größe der Spektralkomponenten nichtganzzahliger Ordnung wollen wir uns am Beispiel einer Dreieckimpulsfolge erarbeiten.

Bild 4.4a zeigt eine Dreieckimpulsfolge und die ersten symmetrischen Aufbaufunktionen, die bei der Zerlegung benötigt werden. Wird die Wiederholperiode verdoppelt, dann sind bei der Zerlegung für den neuen Zeitmaßstab Θ' die Aufbaufunktionen cal $(0, \Theta')$, cal $(1, \Theta')$, cal $(2, \Theta')$ usf. zu berücksichtigen. Für den auf die ursprüngliche Wiederholperiode bezogenen Zeitmaßstab Θ ergeben sich neue Aufbaufunktionen, die zwischen den Aufbaufunktionen mit ganzer Ordnungszahl liegen. Wir bezeichnen sie wegen der halben Bezugszeit T_0 im System Θ gegenüber der Bezugszeit im System Θ' durch die jeweils halbe Ordnungszahl. Wie wir im Bild 4.4b sehen, haben die Aufbaufunktionen mit nichtganzzahliger Ordnungszahl in dem Bereich $-\frac{1}{2} < \Theta < +\frac{1}{2}$ den gleichen Verlauf wie die am nächsten benachbarten Aufbaufunktionen ganzzahliger Ordnung mit kleinerer Ordnungszahl. Zum Beispiel stimmt in diesem Bereich cal $(1{,}5; \Theta)$ mit cal $(1, \Theta)$ überein. Da die Funktion $x_2(\Theta)$ im übrigen Teil der Periode 2 den Wert Null besitzt, ergibt sich bei der Berechnung der Spektralkomponenten für die Zwischenwerte immer der gleiche Wert wie für die am nächsten benachbarten Spektralkomponenten kleinerer, aber ganzzahliger Ordnung. Im Gedankenexperiment können wir feststellen, daß diese Oberlegungen für jede beliebige Streckung der Periode gelten.

Es gilt allgemein:

$$a_c(\mu) = a_c(i) = X_c(i) \text{ für } i \leqq \mu < i + 1 \; ; \; i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_s(\mu) = a_s(i) = X_s(i) \text{ für } i - 1 \leqq \mu \leqq i \; ; \; i = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Die bei nichtsymmetrischen Funktionen auftretenden Komponenten $a_s(\mu)$, die mit den Sal-Funktionen verknüpft sind, haben bei nichtganzzahliger Ordnung den gleichen Wert wie die benachbarten Komponenten ganzzahliger höherer Ordnung.

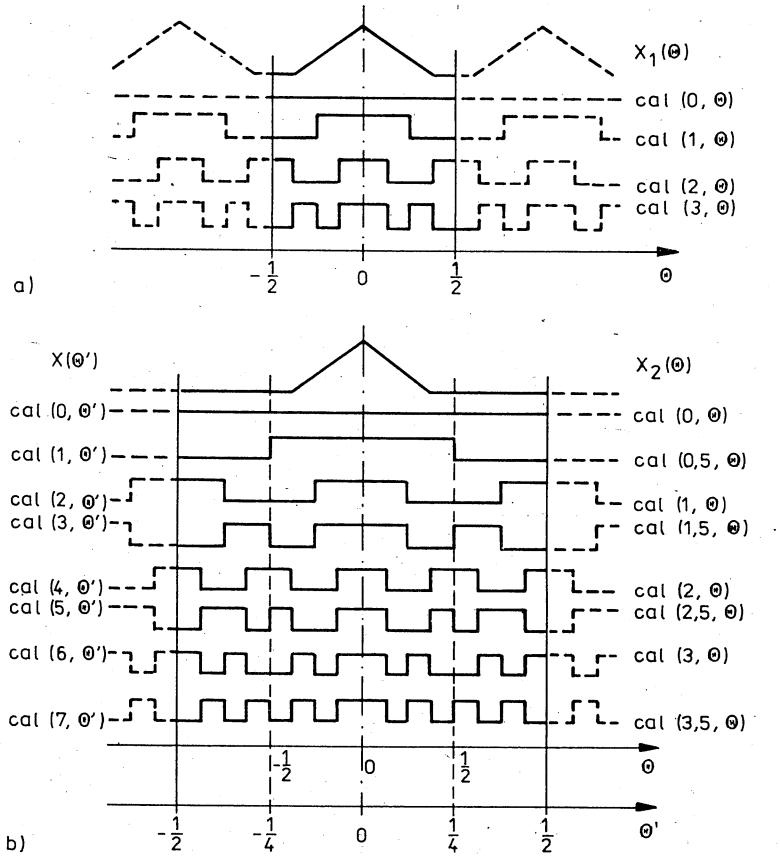


Bild 4.4 Dreieckimpulsfolge mit den ersten symmetrischen Aufbaufunktionen

a) Wiederholperiode T_0 ($\hat{=}\ \Theta_0 = 1$)

b) Verdoppelte Wiederholperiode $2\,T_0$ ($\hat{=}\ \Theta_0 = 2$)

Beispiel:

Für einen einzelnen symmetrischen Dreieckimpuls nach Bild 4.5 erhalten wir bei einer Zeitbasis T_0, die gleich der Dauer des Impulses, also gleich der Dreieckbasis ist, mit den Spektralkomponenten aus Bild 4.3 ein kontinuierliches Spektrum, wie es im Bild 4.5 rechts dargestellt ist.

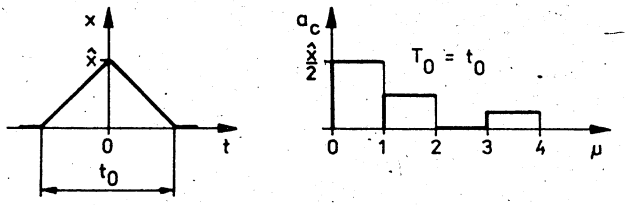


Bild 4.5 Dreieckimpuls und kontinuierliches Mäanderfunktionsspektrum für $T_0 = t_0$

4.1.3. Parsevalsche Gleichung

Für das vollständige Mäanderfunktionssystem erhält man die Parsevalschen Gleichungen:

für periodische Funktionen:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f^2(\Theta)\, d\Theta = \sum_{i=0}^{\infty} \left[x_c^2(i) + x_s^2(i)\right], \qquad (4.7)$$

für aperiodische Funktionen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\Theta)\, d\Theta = \int_{0}^{\infty} \left[a_c^2(\mu) + a_s^2(\mu)\right] d\mu . \qquad (4.8)$$

4.1.4. Aufgaben

Lösen Sie die Aufgaben 10 und 11, Lehrbrief 3!

4.2. Haar-Transformation

Das Funktionssystem von Haar (1910) ist ein Orthogonalsystem aus gleichartigen, nur zeitverschobenen Funktionen im Orthogonalitätsintervall $0 \leqq \Theta \leqq 1$ mit $\Theta = \frac{t}{T}$ (T Bezugszeit).
Bild 4.6 zeigt die ersten acht Aufbaufunktionen des Systems.
Die Fortsetzung ist offensichtlich.
Die Maximalwerte der Aufbaufunktionen ergeben sich aus der Beziehung

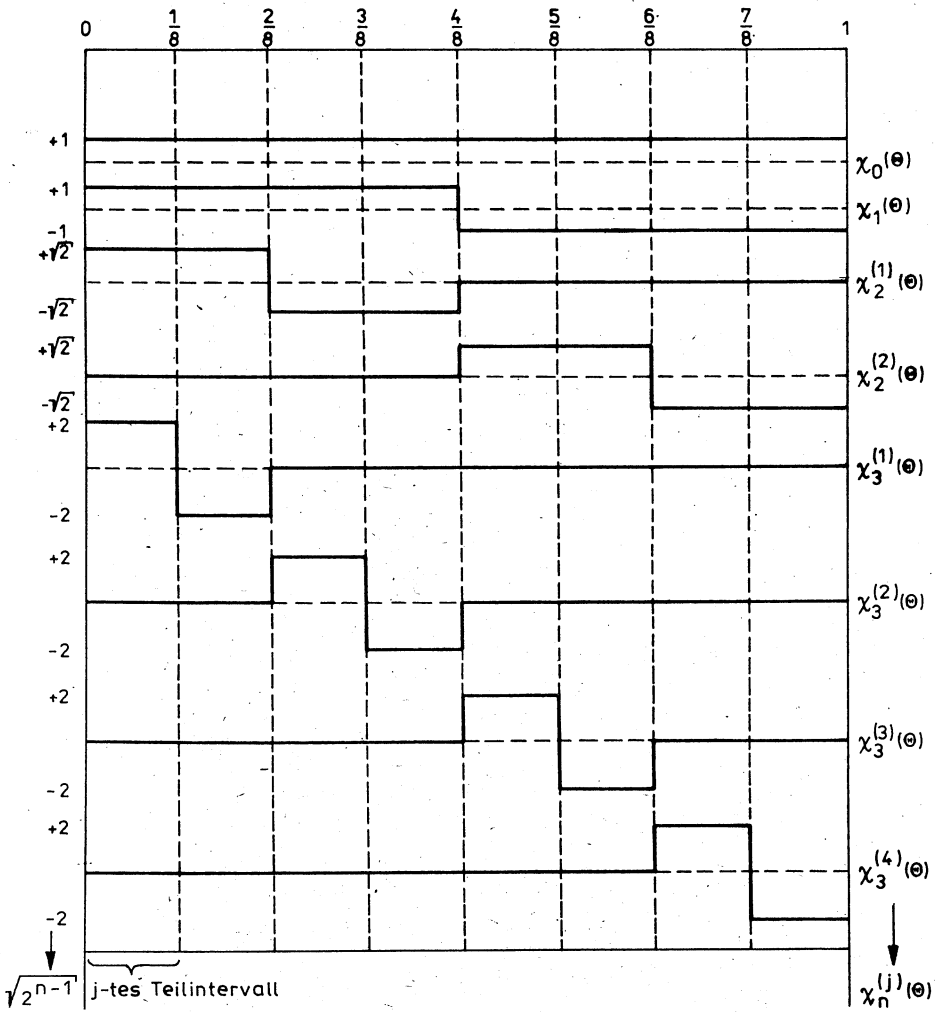


Bild 4.6 Aufbaufunktionen der Haar-Transformation (orthonormal)

$$\hat{\chi}_n^{(j)}(\Theta) = \left|\sqrt{2^{n-1}}\right| .$$

Eine Zeitfunktion $x(\Theta)$ wird durch die Reihe

$$x(\Theta) = c_0\, \chi_0(\Theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} c_n^{(j)}\, \chi_n^{(j)}(\Theta)$$

approximiert.

Haar-Koeffizienten:

$$c_0 = \int_0^1 x(\Theta)\, \chi_0(\Theta)\, d\Theta ,$$

$$c_n^{(j)} = \int_0^1 x(\Theta)\, \chi_n^{(j)}(\Theta)\, d\Theta$$

mit $j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$,
$n = 1, 2, \ldots$

Ist das Funktionssystem orthonormal?

Ein weiteres Rechteckfunktionssystem ist zum Beispiel im Taschenbuch Akustik (1984) angegeben.